Séminaires & Congrès

COLLECTION SMF

INTRODUCTION AUX INÉGALITÉS DE CARLEMAN

Gilles Lebeau

CONTROL AND STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Numéro 29

Kaïs Ammari, ed.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Séminaires & Congrès
29, 2015, p. 51–92

INTRODUCTION AUX INÉGALITÉS DE CARLEMAN

par

Gilles Lebeau

Résumé. — On introduit les bases du calcul h-pseudodifférentiel. On applique ce calcul pour prouver des estimations de Carleman elliptiques, ou paraboliques. En utilisant les inégalités de Carleman elliptiques, on prouve une inégalité de type spectral sur les combinaisons linéaires de fonctions propres du laplacien. Comme application de cette inégalité spectrale, on donne une preuve de la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur dans un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$. Enfin, on donne une preuve alternative de la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur en utilisant les estimations de Carleman paraboliques.

1. Introduction

Les estimations de Carleman ont été introduites en 1939 par T. Carleman [**1**] pour démontrer des résultats d'unicité pour les solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques. Ces estimations ont été systématisées et généralisées en particulier par L. Hörmander [**4**]. Les estimations de type Carleman en trouvé depuis de nouveaux champs d'applications, en particulier en théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles (voir par exemple [**3**] et [**8**]), en théorie spectrale (voir [**7**]) et aussi dans l'étude des problèmes inverses (reconstruction de coefficients d'une équation par observation partielle de certaines de ses solutions, voir [**5**]). On renvoie à l'article de survey [**6**] pour une bibliographie conséquente sur le sujet.

Ces notes contiennent une introduction aux techniques d'inégalités de Carleman, avec application au contrôle d'équations paraboliques (typiquement, équation de la chaleur). Si P est un opérateur différentiel, une inégalité de Carleman typique est de la forme

$$\|h^{1/2}e^{\varphi/h}u\|_{L^2}^2 + \|h^{3/2}e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_{L^2}^2 \leq C\|h^2 e^{\varphi/h}Pu\|_{L^2}^2$$

où φ est une fonction C^∞ et $h > 0$ un petit paramètre. Le point de vue systématique adopté dans ces notes de cours est que l'obtention d'une telle inégalité revient naturellement à prouver une estimation sur l'opérateur différentiel conjugué

$$P_\varphi = h^2 e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h}$$

qui dépend explicitement du petit paramètre h, et est un opérateur h-différentiel. L'obtention de l'inégalité de Carleman revient alors à l'étude des propriétés de la variété caractéristique de l'opérateur P_φ, qui dépend fortement des propriétés de la fonction φ. Dans l'espace de phase, la conjugaison $P \to P_\varphi$ est associée à la transformation canonique *complexe*

$$(x, \xi) \to (x, \xi + i\varphi'(x))$$

qui est licite, car le symbole de P dépend polynomialement de ξ.

Ces notes de cours sont organisées comme suit :

Dans la section 2, on rappelle les notions de base du calcul h-pseudodifférentiel : symboles, opérateurs, théorème de calcul symbolique (théorème 2.1), théorème d'opérance sur les espaces de Sobolev semiclassiques (théorème 2.2). On prouve l'inégalité de Garding semiclassique (théorème 2.3) qui est un des ingrédients de la preuve des inégalités de Carleman. Enfin on décrit l'exemple simple de l'oscillateur harmonique qui fait clairement apparaître une inégalité de Carleman (qui est en fait ici l'inégalité de Heisenberg) comme conséquence de la positivité d'un commutateur. On renvoie aux ouvrages [**2**] et [**9**] pour les preuves des résultats standarts que nous rappellons ici et utiliserons ensuite sur le calcul h-pseudodifférentiel.

Dans la section 3, on commence par donner la preuve de l'inégalité de Carleman elliptique “locale" pour un opérateur de type laplacien (théorème 3.1). On en déduit le célèbre théorème d'unicité de Calderon (théorème 3.2). On donne ensuite la preuve de l'estimation de Carleman “ au bord" (théorème 3.5) après avoir introduit les notions et résultats de base du calcul h-pseudodifférentiel tangentiel.

Dans la section 4, on expose la preuve des inégalités de Carleman paraboliques “locales en espace" ou “au bord" (théorèmes 4.1 et 4.2). Les preuves s'obtiennent par réduction à une inégalité stationnaire en variable temporelle. Pour l'inégalité “au bord", la preuve utilise une version “au bord" de l'inégalité de Garding, qui semble être un point technique nouveau dans ce cadre.

Dans la section 5, on montre d'abord (théorème 5.1) comment on peut déduire des estimations de Carleman elliptiques des inégalités d'interpolation globales, ne faisant plus apparaître le petit paramètre h. On en déduit une inégalité spectrale sur les combinaisons linéaires de fonctions propres du laplacien avec condition de Dirichlet au bord dans un domaine borné régulier (théorème 5.2). Cette inégalité spectrale est une des plus spectaculaires applications des inégalités de Carleman.

Enfin, dans la section 6, on expose la preuve du théorème de contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur. Cette preuve suit la stratégie de l'article [**8**], mais est grandement simplifiée par l'usage de l'inégalité spectrale prouvée dans la section 5.

Finalement, on montre comment les inégalités de Carleman paraboliques fournissent une preuve alternative de la contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur, via l'obtention d'une inégalité d'observabilité (donc une preuve dans l'esprit des travaux de Fursikov et Imanuvilov, voir [**3**]).

Notations

On note $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées.

Pour K compact de $\mathbb{R}^n$, on note C_K^∞ l'espace des fonctions C^∞ à support dans K.

On note $h \in]0, h_0]$ un petit paramètre réel.

Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \quad \text{et} \quad \langle \xi \rangle = (1 + \xi^2)^{1/2}.$$

Pour V ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f fonction de V dans $\mathbb{C}$, on note

$$\|f\|_{L^2(V)} = \Big(\int_V |f|^2 dx \Big)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{H^1(V)} = \Big(\int_V (|f|^2 + |\nabla f|^2) dx \Big)^{1/2}$$

les normes L^2 et H^1 de f.

L'adjoint A^* de l'opérateur A est l'adjoint sur L^2, défini par

$$\int A^*(u)(x)\overline{v}(x)dx = \int u(x)\overline{A(v)(x)}dx.$$

2. Calcul h-pseudodifférentiel

Définition 2.1. — *Soit $a(x, \xi, h)$ une fonction C^∞ de $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, dépendant de $h \in]0, h_0]$. On dit que a est un symbole d'ordre m, et on note $a \in S^m$ ssi pour tout multi-indice α, β, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \ \forall h \in]0, h_0] \tag{2.1}$$

Pour $a \in S^m$, le symbole principal de a, qu'on note $\sigma_m(a)$, est la classe de a dans l'espace quotient S^m/hS^{m-1}.

On a évidemment $S^m \subset S^{m'}$ pour tout $m \leq m'$, et on vérifie aisément que pour $a \in S^m$ et $b \in S^{m'}$, on a $ab \in S^{m+m'}$, $\frac{\partial a}{\partial x_j} \in S^m$, $\frac{\partial a}{\partial \xi_j} \in S^{m-1}$, et en notant

$$\{a, b\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial b}{\partial \xi_j}$$

le crochet de Poisson des fonctions a et b, on a $\{a, b\} \in S^{m+m'-1}$.

Définition 2.2. — *Soit $a \in S^m$ et $(a_j)_{j\geq 0}$ une suite de symboles avec $a_j \in S^{m-j}$. On dit que a est asymptotique à la somme des $h^j a_j$, et on note $a \simeq \sum_j h^j a_j$ ssi pour tout N entier on a*

$$a - \sum_{j=0}^{N} h^j a_j \in h^{N+1} S^{m-N-1}. \tag{2.2}$$

Le lemme suivant est essentiellement dû à Émile Borel (voir [**9**], proposition 2.3.2)

Lemme 2.1. — *Pour toute suite de symboles $a_j \in S^{m-j}$, il existe un symbole $a \in S^m$ tel que $a \simeq \sum_j h^j a_j$.*

Définition 2.3. — *Pour $a \in S^m$, on note $\mathrm{Op}(a)$ l'opérateur défini sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la formule*

$$\mathrm{Op}(a)(u)(x,h) = (2\pi h)^{-n} \int e^{ix.\xi/h} a(x,\xi,h)\hat{u}(\xi/h) d\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{2.3}$$

où $\hat{u}(\eta) = \int e^{-iy.\eta} u(y) dy$ est la transformée de Fourier de u.

On remarquera que $\mathrm{Op}(a)$ est en fait une famille d'opérateurs dépendant du paramètre $h \in]0, h_0]$: pour chaque valeur de $h \in]0, h_0]$, la formule (2.3) définit un opérateur agissant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour $a \in S^m$, on vérifie aisément que (pour tout h fixé) $\mathrm{Op}(a)$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus $\mathrm{Op}(a)$ se prolonge de manière unique en opérateur continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, et on a

$$a(x,\xi,h) = e^{-ix.\xi/h} \mathrm{Op}(a)(e^{ix.\xi/h}) \tag{2.4}$$

de sorte que l'application $a \mapsto \mathrm{Op}(a)$ est injective. Pour $a \in S^m$, on note $\mathrm{Op}(a) \in \mathcal{E}^m$, et pour $A = \mathrm{Op}(a) \in \mathcal{E}^m$, on appelle $a(x,\xi,h)$ le symbole complet de A. On note $a = \sigma(A)$. On appelle symbole principal de A, la classe de a dans l'espace quotient S^m/hS^{m-1}. On note $\sigma_m(A) = \sigma_m(a)$ le symbole principal de A. Enfin, on pose

$$\mathcal{E} = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{E}^m. \tag{2.5}$$

Les éléments de $\mathcal{E}$ s'appellent les opérateurs h-pseudodifférentiels, on a $\mathcal{E}^m \subset \mathcal{E}^{m'}$ pour $m \leq m'$, et pour $A \in \mathcal{E}^m$, on dit que A est de degré (au plus) m.

Exemple 2.1. — *La fonction constante égale à 1 appartient à S^0, et on a par la formule d'inversion de Fourier et (2.3)*

$$\mathrm{Op}(1)(u) = u.$$

On a aussi $\xi_j \in S^1$, et $\mathrm{Op}(\xi_j)u = \frac{h}{i}\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Pour $\phi(x) \in C_b^\infty$, on a $\phi \in S^0$, et $\mathrm{Op}(\phi)u = \phi u$. Plus généralement, on remarquera qu'on a

$$\mathrm{Op}(\phi(x)a(x,\xi,h))(u) = \phi(x)\mathrm{Op}(a(x,\xi,h))(u)$$

et si le symbole $b(\xi,h)$ *est indépendant de* x

$$\mathrm{Op}(a(x,\xi,h)b(\xi,h)) = \mathrm{Op}(a(x,\xi,h)) \circ \mathrm{Op}(b(\xi,h)).$$

Le théorème suivant donne les règles de calcul symbolique pour les opérateurs h-pseudodifférentiels. On en trouvera une preuve dans [**9**], théorème 2.6.5.

Théorème 2.1. — (i) *Pour* $a \in S^m$ *et* $b \in S^{m'}$, *il existe un unique* $c \in S^{m+m'}$ *tel qu'on ait* $\mathrm{Op}(a) \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(c)$. *On note* $c = a \# b$, *et on a*

$$c = a \# b \simeq \sum_{\alpha} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial_\xi^\alpha a \partial_x^\alpha b. \tag{2.6}$$

En particulier, pour $A \in \mathcal{E}^m$ *et* $B \in \mathcal{E}^{m'}$, *on a* $AB \in \mathcal{E}^{m+m'}$, *et en notant* $[A,B] = AB - BA$ *le commutateur des opérateurs* A *et* B, *on a* $\frac{i}{h}[A,B] \in \mathcal{E}^{m+m'-1}$. *On a les formules*

$$\sigma_{m+m'}(AB) = \sigma_m(A)\sigma_{m'}(B), \quad \sigma_{m+m'-1}(\tfrac{i}{h}[A,B]) = \{\sigma_m(A), \sigma_{m'}(B)\}. \tag{2.7}$$

(ii) *Pour* $A = \mathrm{Op}(a) \in \mathcal{E}^m$, *il existe un unique* $a^* \in S^m$ *tel que* $A^* = \mathrm{Op}(a^*)$, *et on a*

$$a^* = \sigma(A^*) \simeq \sum_{\alpha} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \overline{a}. \tag{2.8}$$

En particulier, on a

$$\sigma_m(A^*) = \overline{\sigma_m(A)}. \tag{2.9}$$

On a $\langle\xi\rangle \in S^1$, et on note $\Lambda = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle)$. Plus généralement, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\langle\xi\rangle^s \in S^s$, et les opérateurs $\Lambda^s = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^s)$ vérifient $\Lambda^s \circ \Lambda^{s'} = \Lambda^{s+s'}$ pour tout $s, s' \in \mathbb{R}$.

Définition 2.4. — *Pour tout* $s \in \mathbb{R}$, *et tout* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *on note*

$$\|u\|_s = \|\Lambda^s(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.10}$$

On note $\mathcal{H}^s$ *le complété de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *pour la norme Hilbertienne* $\|.\|_s$. *En tant qu'espace vectoriel, l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}^s$ *est égal à l'espace de Sobolev usuel* $H^s(\mathbb{R}^n)$. *La norme de* $\mathcal{H}^s$ *dépend toutefois du paramètre* h. *En particulier, pour* $s = k \geq 0$ *entier, on a, avec* C *indépendant de* $h \in]0, h_0]$ *et de* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{C} \sum_{|\alpha| \leq k} h^{2|\alpha|} \|\partial_x^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_k^2 \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} h^{2|\alpha|} \|\partial_x^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.11}$$

Pour tout $s \geq 0$, il existe C_s indépendant de $h \in]0, h_0]$ tel que

$$\|u\|_s \leq C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n) \tag{2.12}$$

et pour tout $s \leq 0$, il existe C_s indépendant de $h \in]0, h_0]$ tel que

$$\|u\|_s \geq C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n). \tag{2.13}$$

Le résultat suivant de continuité des opérateurs h-pseudodifférentiels sur les espaces $\mathcal{H}^s$ est fondamental. Il est du à Calderon et Vaillancourt. (voir **[9]**, théorème 2.8.1)

Théorème 2.2. — *Soit $a \in S^m$ et $A = \mathrm{Op}(a) \in \mathcal{E}^m$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante C_s indépendante de $h \in]0, h_0]$ telle qu'on ait*

$$\|A(u)\|_{s-m} \leq C_s \|u\|_s, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n). \tag{2.14}$$

Définition 2.2. — *Soit $a \in S^m$. On notera $a \in S^m_{cl}$ si il existe des symboles $a_j(x,\xi) \in S^{m-j}$ indépendants de h tels que*

$$a \simeq \sum_j h^j a_j. \tag{2.15}$$

On notera alors $A = \mathrm{Op}(a) \in \mathcal{E}^m_{cl}$.

D'après la formule (2.6), pour $A \in \mathcal{E}^m_{cl}$ et $B \in \mathcal{E}^{m'}_{cl}$, on a $A \circ B \in \mathcal{E}^{m+m'}_{cl}$ et $\frac{i}{h}[A, B] \in \mathcal{E}^{m+m'-1}_{cl}$. On a par exemple $\Lambda = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle) \in \mathcal{E}^1_{cl}$.

Le théorème simple suivant est d'usage fréquent.

***Théorème 2.3* (Inégalité de Garding semiclassique)**. — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $a \in S^m$ vérifiant*

$$\exists C, \ \mathrm{Re}(a(x,\xi,h)) \geq C \langle\xi\rangle^m, \quad \forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall h \in]0, h_0]. \tag{2.16}$$

Alors pour tout $C' < C$, il existe $h_1 > 0$ tel qu'on ait

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a)u|u)_{L^2} \geq C' \|u\|^2_{m/2}, \quad \forall u \in C^\infty_K, \forall h \in]0, h_1]. \tag{2.17}$$

Démonstration. — Soit $C'' \in]C', C[$. Comme on a d'après (2.1),

$$|a(x,\xi,h) - a(y,\xi,h)| \leq \mathrm{C^{te}} |x-y| \langle\xi\rangle^m,$$

si V un voisinage assez petit de K, on a $\mathrm{Re}(a(x,\xi,h)) \geq C'' \langle\xi\rangle^m$ pour tout $x \in V$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in]0, h_0]$. Soit alors $\chi \in C^\infty_0(V)$ une fonction à valeurs dans $[0,1]$, et égale à 1 au voisinage de K. Posons

$$\tilde{a} = \chi a + C''(1-\chi) \langle\xi\rangle^m.$$

On a

$$\mathrm{Re}(\tilde{a}) \geq \chi \mathrm{Re}(a) + C''(1-\chi) \langle\xi\rangle^m \geq C'' \langle\xi\rangle^m, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall h \in]0, h_0].$$

Soit $L \in]C', C''[$ et $b = (\mathrm{Re}(\tilde{a}) - L \langle\xi\rangle^m)^{1/2}$. On a $b \in S^{m/2}$, et avec $B = \mathrm{Op}(b)$ et d'après le théorème 2.1, en notant $\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(\tilde{a})) = \frac{1}{2}(\mathrm{Op}(\tilde{a}) + \mathrm{Op}(\tilde{a})^*)$

$$B^*B = \mathrm{Re}(\mathrm{Op}(\tilde{a})) - L\Lambda^m + hR, \quad R \in \mathcal{E}^{m-1}.$$

En utilisant $\Lambda^{-(m-1)/2} R \in \mathcal{E}^{(m-1)/2}$, il existe d'après (2.14) une constante D telle qu'on ait

$$|(Ru|u)_{L^2}| = |(\Lambda^{-(m-1)/2} Ru | \Lambda^{(m-1)/2} u)_{L^2}| \leq D \|u\|^2_{(m-1)/2}$$

et il en résulte, puisque $(\mathrm{Op}(\tilde{a}))u|u)_{L^2} = (\mathrm{Op}(a))u|u)_{L^2}$ pour tout $u \in C^\infty$ à support dans K,

(2.18)
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a))u|u)_{L^2} &= (\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(\tilde{a}))u|u)_{L^2} = \|Bu\|^2_{L^2} + L(\Lambda^m u|u)_{L^2} - h(Ru|u)_{L^2}\\ &\geq L\|u\|^2_{m/2} - Dh\|u\|^2_{(m-1)/2} \geq (L - Dh)\|u\|^2_{m/2}\end{aligned}$$

et on conclut en choisissant h_1 assez petit. □

Exemple 2.3. — *Nous allons détailler ici un exemple très simple à une variable, mais qui est à la base des inégalités de Carleman. On remarquera que la fonction x n'est pas bornée, donc la fonction $\xi \pm ix$ n'est pas un symbole au sens précédent, mais cela ne jouera aucun rôle pour notre exemple, car nous ne ferons opérer les opérateurs que sur des fonctions de l'espace de Schwartz. On pose, avec $x \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}A_1 &= \tfrac{h}{i}\partial_x + ix = \mathrm{Op}(\xi + ix),\\ A_2 &= \tfrac{h}{i}\partial_x - ix = \mathrm{Op}(\xi - ix).\end{aligned} \tag{2.19}$$

En physique quantique, A_1 s'appelle l'opérateur de création et A_2 l'opérateur d'annihilation. On a $A_2 = A_1^*$, et les formules

$$\begin{aligned}A_2^*A_2 &= A_1A_2 = -h^2\partial_x^2 + x^2 - h,\\ A_1^*A_1 &= A_2A_1 = -h^2\partial_x^2 + x^2 + h = A_2^*A_2 + 2h,\\ [A_2, A_1] &= 2h\,\mathrm{Id}\\ A_2(e^{-x^2/2h}) &= 0.\end{aligned} \tag{2.20}$$

L'opérateur autoadjoint positif $\mathcal{O} = A_2^*A_2 = -h^2\partial_x^2 + x^2 - h$ s'appelle l'oscillateur harmonique. Il est à résolvante compacte, et son spectre est formé des valeurs propres simples $2hk$, $k \in \mathbb{N}$. Son noyau est engendré par la gaussienne $e(x) = e^{-x^2/2h}$, et de la formule

$$\mathcal{O}A_1^k = A_1A_2A_1^k = A_1[A_2, A_1]A_1^{k-1} + A_1\mathcal{O}A_1^{k-1} = 2hA_1^k + A_1\mathcal{O}A_1^{k-1} = \cdots = 2hkA_1^k,$$

on déduit que le noyau de $\mathcal{O} - 2hk$ est engendré par la fonction $A_1^k(e)$. Les fonctions $A_1^k(e)$ s'appellent les fonctions d'Hermite.

L'opérateur A_1 est évidemment injectif sur $L^2(\mathbb{R})$, l'équation différentielle ordinaire $A_1f = 0$ ayant pour solutions les fonctions $f(x) = ce^{x^2/2h}$ qui ne sont dans $L^2(\mathbb{R})$ que si la constante c est nulle. Voyons comment obtenir une minoration de $\|A_1u\|_{L^2}$ pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose

$$A_1 = Q_1 + iQ_2, \quad Q_1 = \mathrm{Re}(A_1) = \frac{h}{i}\partial_x, \quad Q_2 = \mathrm{Im}(A_1) = x. \tag{2.21}$$

Les opérateurs Q_1 et Q_2 sont autoadjoints, et $[Q_1, Q_2] = h/i$. En utilisant

$$A_1^*A_1 = (Q_1 - iQ_2)(Q_1 + iQ_2) = Q_1^2 + Q_2^2 + i[Q_1, Q_2]$$

on obtient

$$\begin{aligned}\|A_1u\|^2_{L^2} = (A_1^*A_1u|u)_{L^2} &= \|Q_1u\|^2_{L^2} + \|Q_2u\|^2_{L^2} + i([Q_1,Q_2]u|u)_{L^2} \\ &\geq i([Q_1,Q_2]u|u)_{L^2} = h\|u\|^2_{L^2}\end{aligned} \tag{2.22}$$

d'où il résulte

$$\|A_1u\|_{L^2} \geq h^{1/2}\|u\|_{L^2}. \tag{2.23}$$

Comme on a $A_2 = A_1^* = Q_1 - iQ_2$, *on a aussi*

$$0 \leq \|A_2u\|^2_{L^2} = (A_2^*A_2u|u)_{L^2} = \|Q_1u\|^2_{L^2} + \|Q_2u\|^2_{L^2} - i([Q_1,Q_2]u|u)_{L^2} \tag{2.24}$$

qui combiné avec (2.22) donne la meilleure estimation

$$\|A_1u\|^2_{L^2} \geq 2h\|u\|^2_{L^2}. \tag{2.25}$$

Cette dernière estimation est optimale. Ceci résulte de $A_1^*A_1 = A_2A_1 = A_1A_2 + 2hId = \mathcal{O} + 2hId$, *ce qui prouve que la gaussienne* $e(x) = e^{-x^2/2h}$ *vérifie* $\|A_1e\|^2_{L^2} = 2h\|e\|^2_{L^2}$.

Si on revient maintenant au calcul h-pseudodifférentiel, on remarque que $A_1 = \mathrm{Op}(a)$ *avec* $a = \xi + ix$. *Le point fondamental que nous avons utilisé dans (2.22) est la positivité du commutateur* $\frac{i}{h}[Q_1,Q_2]$, *dont le symbole principal est d'après (2.7)*

$$\{\mathrm{Re}(a), \mathrm{Im}(a)\} = \{\xi, x\} = 1 > 0. \tag{2.26}$$

3. Estimations de Carleman elliptiques

Dans cette section, on décrit les estimations de Carleman pour le laplacien sur $\mathbb{R}^n$

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}. \tag{3.27}$$

Plus généralement, on peut traiter exactement de la même manière le cas d'un opérateur elliptique d'ordre 2 à symbole principal réel

$$P = -\sum_{j,k} g_{j,k}(x)\partial_j\partial_k + \sum_j b_j(x)\partial_j + c(x) \tag{3.28}$$

où les fonctions $g_{j,k}, b_j, c$ sont C_b^∞, les $g_{j,k} = g_{k,j}$ étant à valeurs réelles et vérifiant pour une constante $c > 0$, $\sum_{j,k} g_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \geq c\xi^2$ pour tout x et tout ξ. Il suffit pour cela de remplacer dans ce qui suit le produit scalaire $(u|u') = \sum u_i\overline{u}'_i$ par la métrique $(u|u')_g x = \sum g_{j,k}(x)u_j\overline{u}'_k$.

Soit φ une fonction C_b^∞ à valeurs réelles. On pose, avec $P = -\triangle$

$$P_\varphi = h^2e^{\varphi(x)/h}Pe^{-\varphi(x)/h} = h^2P - |\nabla\varphi|^2 + 2h\nabla\varphi.\nabla + h\triangle(\varphi). \tag{3.29}$$

Alors on a $P_\varphi \in \mathcal{E}^2$ et son symbole principal est, avec $\varphi'_x = \nabla\varphi$,

$$\sigma_2(P_\varphi) = p_\varphi = q_2 + iq_1, \quad q_2 = |\xi|^2 - |\varphi'_x|^2 \in S^2, \ q_1 = 2(\varphi'_x|\xi) \in S^1. \tag{3.30}$$

On remarquera qu'on a $\sigma_2(P_\varphi) = (\xi + i\varphi'_x)^2$, ou plus généralement si P est de la forme (3.28)

$$\sigma_2(P_\varphi) = \sum_{j,k} g_{j,k}(x)(\xi_j + i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j})(\xi_k + i\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}).$$

Définition 3.1. — *Soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. On dit que φ vérifie l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur $\overline{V}$ ssi on a $\varphi'_x \neq 0$ pour tout $x \in \overline{V}$, et s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall(x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, \quad p_\varphi(x,\xi) = 0 \implies \{q_2, q_1\}(x,\xi) \geq C. \tag{3.31}$$

On remarquera que l'ensemble

$$Z = \{(x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, p_\varphi(x,\xi) = 0\} = \{(x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, \xi^2 = |\varphi'_x|^2, \varphi'_x.\xi = 0\}$$

est compact.

Lemme 3.2. — *Soit ψ une fonction C^∞ définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\psi'_x \neq 0$ pour tout $x \in \overline{V}$. Soit G une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $G' > 0$ et $G'' > 0$. Il existe une constante D telle que si $G'' \geq DG'$, alors $\varphi(x) = G(\psi(x))$ vérifie l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur $\overline{V}$.*

Démonstration. — On a $\varphi' = G'(\psi)\psi'$ donc $\varphi'_x \neq 0$ pour tout $x \in \overline{V}$. Un calcul simple donne

$$\{q_2, q_1\} = 2\{\xi^2 - |\varphi'_x|^2, \varphi'_x.\xi\} = 4(\varphi''(\xi,\xi) + \varphi''(\varphi'_x, \varphi'_x)) \tag{3.32}$$

où $\varphi'' = (\varphi''_{j,k})$ est la hessienne de φ. On a $\varphi''_{j,k} = G''(\psi)\psi'_j\psi'_k + G'(\psi)\psi''_{j,k}$, d'où

$$\begin{aligned} I &= \varphi''(\xi,\xi) + \varphi''(\varphi'_x, \varphi'_x) \\ &= \textstyle\sum_{j,k}(G''(\psi)\psi'_j\psi'_k\xi_j\xi_k + G'(\psi)\psi''_{j,k}\xi_j\xi_k) \\ &\quad + \textstyle\sum_{j,k}(G''(\psi)G'(\psi)^2\psi'^2_j\psi'^2_k + G'(\psi)^3\psi''_{j,k}\psi'_j\psi'_k). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sur $q_2(x,\xi) = 0$, on a $|\xi| = |\varphi'_x| = G'(\psi)|\psi'_x|$, d'où

$$\begin{aligned} I &= G''(\psi)G'(\psi)^2|\psi'_x|^4 + G''(\psi)|\psi'_x.\xi|^2 + O(G'(\psi)^3|\psi''||\psi'|^2) \\ &\geq DG'(\psi)^3|\psi'_x|^4 + O(G'(\psi)^3|\psi''||\psi'|^2) \end{aligned} \tag{3.34}$$

et on conclut en utilisant $\psi'_x \neq 0$ pour tout $x \in \overline{V}$. □

Remarque 3.3. — *La preuve du lemme (3.2) montre qu'en fait, pour D assez grand, on a*

$$\forall(x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, \quad q_2(x,\xi) = 0 \implies \{q_2, q_1\}(x,\xi) \geq C, \tag{3.35}$$

ce qui est mieux que (3.31). Nous nous en servirons pour les estimations de Carleman paraboliques.

Remarque 3.4. — *On remarquera que les fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(x) = G(\psi(x))$ ont exactement les mêmes ensembles de niveau.*

Exemple 3.5. — *En choisissant $\psi(x) = x_1$, et $G(u) = e^{Du}$, on voit que $\varphi(x) = e^{Dx_1}$ vérifie l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur $\overline{V}$ dès que $D > 0$ est assez grand.*

3.1. Estimations intérieures. — Nous allons dans cette section démontrer l'estimation de Carleman elliptique pour P, et en déduire un théorème d'unicité dû à Calderon.

Théorème 3.1. — *Soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et φ une fonction C_b^∞ vérifiant l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur $\overline{V}$. Il existe $h_1 > 0$ et $C > 0$ tels que*
(3.36)

$$h\|e^{\varphi/h}u\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_{L^2}^2 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}Pu\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(V),\ \forall h \in]0, h_1].$$

Remarque 3.6. — *Par un argument de densité élémentaire, l'inégalité (3.36) est évidemment vraie pour toute fonction $u \in H_0^2(V) =$ adhérence de $C_0^\infty(V)$ pour la norme de l'espace de Sobolev H^2. Par contre, l'inégalité (3.36) n'a aucune chance d'être vraie pour tout $u \in H^2(V)$, car elle impliquerait que toute solution définie au voisinage de $\overline{V}$ de l'équation $Pu = 0$ est nulle sur V, ce qui est bien sur faux!*

Remarque 3.7. — *On remarquera que l'inégalité (3.36) reste vraie si on remplace l'opérateur P par $P + R$ avec R opérateur différentiel d'ordre 1. On verra d'ailleurs que la preuve ne fait intervenir que le symbole principal de P.*

Démonstration. — On pose $v = e^{\varphi/h}u$. Alors l'équation $Pu = f$ est équivalente à $P_\varphi v = g$ avec $g = h^2 e^{\varphi/h} f$. On a $P_\varphi = Q_2 + iQ_1$ avec $Q_2 = \mathrm{Re}(P_\varphi) = \frac{1}{2}(P_\varphi + P_\varphi^*)$ et $Q_1 = \mathrm{Im}(P_\varphi) = \frac{1}{2i}(P_\varphi - P_\varphi^*)$. On a $Q_2 \in \mathcal{E}^2$, $\sigma_2(Q_2) = q_2$ et $Q_1 \in \mathcal{E}^1$, $\sigma_1(Q_1) = q_1$. On a

$$\|g\|_{L^2}^2 = \|(Q_2 + iQ_1)v\|_{L^2}^2 = \|Q_2 v\|_{L^2}^2 + \|Q_1 v\|_{L^2}^2 + h(\frac{i}{h}[Q_2, Q_1]v|v). \tag{3.37}$$

Soit $\mu > 0$ et $B_\mu = \mu(Q_2^2 + Q_1^2) + \frac{i}{h}[Q_2, Q_1]$. On a $B_\mu \in \mathcal{E}^4$ et son symbole principal vaut d'après le théorème (2.1)

$$\sigma_4(B_\mu) = \mu(q_2^2 + q_1^2) + \{q_2, q_1\}. \tag{3.38}$$

On a $q_2^2 + q_1^2 \in S^4$, $\{q_2, q_1\} \in S^2$ et pour $|\xi|$ grand, $q_2^2 + q_1^2 \simeq |\xi|^4$. Comme φ vérifie (3.31), il existe donc μ (assez grand) et $c > 0$ tels qu'on ait

$$\sigma_4(B_\mu) \geq c\,\langle\xi\rangle^4, \quad \forall x \in \overline{V}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.39}$$

D'après l'inégalité de Garding (voir le théorème (2.3)), il existe $c' > 0$ et $h_1 > 0$ tels qu'on ait pour tout $v \in C_0^\infty(V)$

$$(B_\mu v|v) \geq c'\|v\|_2^2 \geq c'\|v\|_1^2 = c'(\|v\|_{L^2}^2 + \|h\nabla v\|_{L^2}^2). \tag{3.40}$$

Quitte à diminuer h_1, on peut supposer $h_1\mu < 1$. D'après (3.37), on a alors pour $v \in C_0^\infty(V)$ et $h \in]0, h_1]$

$$\|g\|_{L^2}^2 = (1 - h\mu)(\|Q_2 v\|_{L^2}^2 + \|Q_1 v\|_{L^2}^2) + h(B_\mu v|v) \geq h(B_\mu v|v) \geq$$

$$c'h(\|v\|_{L^2}^2 + \|h\nabla v\|_{L^2}^2). \tag{3.41}$$

En utilisant $v = e^{\varphi/h}u$, $h\nabla v = e^{\varphi/h}(h\nabla u + u\nabla\varphi)$, et $g = h^2 e^{\varphi/h} Pu$, on voit que (3.41) implique (3.36). La preuve du théorème (3.1) est complète. $\square$

Nous allons donner une application du théorème (3.1) à un résultat d'unicité pour les solutions d'équations elliptiques.

Soit $g(y)$ une fonction d'une variable réelle vérifiant

$$\exists C, \quad |g(y)| \leq C|y|, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.42}$$

***Théorème 3.2* (Calderon).** — *Soit P un opérateur de la forme (3.28), et Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in H^2(\Omega)$ vérifiant*

$$P(u) = g(u) \ \textit{dans}\ \Omega. \tag{3.43}$$

Alors si u est nulle sur un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$, u est nulle sur Ω.

***Remarque 3.8*.** — *Rappelons que pour une fonction $u \in L^2(\Omega)$, on dit que u est nulle sur un ouvert $\omega \subset \Omega$ ssi $u(x) = 0$ pour presque tout $x \in \omega$.*

Démonstration. — Soit $G = \{x \in \Omega, u \text{ est nulle au voisinage de } x\}$. Alors G est un ouvert de Ω, non vide par hypothèse, et il suffit de prouver que G est fermé dans Ω ; en effet, comme Ω est connexe, on aura alors nécessairement $G = \Omega$. Pour démontrer que G est fermé dans Ω, il suffit de vérifier que si $y \in G$, alors pour tout $r < \mathrm{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ la boule ouverte $B(y,r)$ est contenue dans G. En effet, si x_0 est adhérent à G, on a $x_0 = \lim y_k$ avec $y_k \in G$ et $B(x_0, r) \subset \Omega$ pour un $r > 0$; pour k assez grand, on a nécessairement $x_0 \in B(y_k, r/4)$ et $r/4 < \mathrm{dist}(y_k, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, donc $x_0 \in G$. La preuve va donc être conséquence du lemme suivant.

***Lemme 3.9*.** — *Soit $x_0 \in \Omega$ et f une fonction réelle C^∞ définie dans un voisinage ω de x_0, telle que $f(x_0) = 0$ et $\nabla f(x) \neq 0$ pour $x \in \omega$.*
Alors si u est nulle sur $U = \{x \in \omega, f(x) < 0\}$, on a u nulle au voisinage de x_0.

Supposons le lemme (3.9) démontré et soit $y \in G$. Posons $I =]0, \mathrm{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)[$ et

$$J = \{r \in I,\ u \text{ est nulle sur } B(y,r)\}.$$

Alors J est non vide car $y \in G$, si $r \in J$, on a $]0, r] \subset J$ et J fermé dans I. On a donc soit $J = I$, soit $J =]0, r_*]$ avec $r_* < \mathrm{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Soit $r \in J$; la fonction u est alors nulle sur la boule ouverte $B(y,r)$. D'après le lemme (3.9) appliqué avec la fonction $f(x) = |x-y|^2 - r^2$, u est nulle au voisinage de chaque point de la sphère $|x - y| = r$, et comme cette sphère est compacte, il en résulte qu'il existe $r' > r$ tel que $r' \in J$. On a donc $J = I$, ce qui achève la preuve du théorème (3.2).

Démontrons à présent le lemme (3.9). Soit $r > 0$ petit, $V = B(x_0, r)$ et $\chi \in C_0^\infty(V)$ avec $\chi(x) = 1$ pour $x \in B(x_0, r/2)$. Posons $\psi = -f - |x - x_0|^2$. Pour r assez petit, on a $\psi'_x \neq 0$ pour tout $x \in \overline{V}$. Posons $\varphi = G(\psi)$ comme dans le lemme (3.2), de sorte que φ vérifie l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur $\overline{V}$. On a $\chi u \in H_0^2(V)$, et donc d'après (3.36)

$$h\|e^{\varphi/h}\chi u\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x(\chi u)\|_{L^2}^2 \leq Ch^4(\|e^{\varphi/h}P(\chi u)\|_{L^2}^2, \ \forall h \in]0, h_1]. \tag{3.44}$$

On a $P(\chi u) = P(\chi u) - \chi P(u) + \chi g(u) = [P, \chi]u + \chi g(u)$, d'où en utilisant l'hypothèse sur g (3.42) et (3.44)

$$h\|e^{\varphi/h}\chi u\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x(\chi u)\|_{L^2}^2 \leq C'h^4(\|e^{\varphi/h}\chi u\|_{L^2}^2 + \|e^{\varphi/h}[P, \chi]u\|_{L^2}^2),$$

$$\forall h \in]0, h_1]. \tag{3.45}$$

Le premier terme dans le membre de droite de (3.45) s'absorbe dans le membre de gauche pour h_1 assez petit, et en notant S le support de $[P, \chi]u$, on déduit de (3.45) avec $r' < r/2$ et $V' = B(x_0, r')$

$$\exp((\min_{V'} \varphi)/h)\|u\|_{L^2(V')}^2 \leq C''h^3 \exp((\max_S \varphi)/h)\|u\|_{H^1(V)}^2. \tag{3.46}$$

On a $S \subset \{f \geq 0\} \cap \{x, r/2 \leq |x - x_0| \leq r\}$, donc par le choix de ψ, on a $\sup_S \psi(x) < \psi(x_0) = 0$. Il en résulte que pour r' assez petit, on a $(\min_{V'} \varphi) > (\max_S \varphi)$, et en faisant tendre h vers zéro dans (3.46), on obtient que u est nulle sur V'. La preuve du lemme 3.9 est complète. □

3.2. Estimations au bord. — Soit Ω un ouvert à bord régulier de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de la frontière $\partial\Omega$, et P un opérateur elliptique d'ordre 2 à symbole principal réel de la forme (3.28). On choisit près de x_0 un système de coordonnées (x', x_n), où $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ est un système de coordonnées locales dans $\partial\Omega$ tel que $x_0 = 0$, de sorte que Ω soit localement défini par $x_n > 0$, et vérifiant

$$\operatorname{dist}((x', x_n), \partial\Omega) = x_n \tag{3.47}$$

où *dist* désigne la distance pour la métrique riemanienne g définie par le symbole principal de P, $|u|_g^2(x) = \sum g_{j,k}(x)u_j u_k$. Les courbes $s \geq 0 \mapsto (x', s)$ sont alors des géodésiques pour cette métrique, issues du point $(x', 0) \in \partial\Omega$ avec vitesse initiale perpendiculaire à $\partial\Omega$. Un tel système de coordonnées s'appelle un système de coordonnées géodésiques normales. Dans un tel système de coordonnées, l'opérateur P est de la forme

$$P = -\partial_{x_n}^2 - R(x_n, x', \partial_{x'}) + A_1(x, \partial_x), \quad R(x_n, x', \partial_{x'}) = \textstyle\sum_{j,k \leq n-1} g_{j,k}(x_n, x')\partial_j\partial_k \tag{3.48}$$

où A_1 est un opérateur d'ordre 1, et $\sum_{j,k \leq n-1} g_{j,k}(s, x')u_j u_k$ est la métrique induite par g sur l'hypersurface $x_n = s$. Pour démontrer une inégalité de Carleman au bord, nous allons utiliser un calcul h-pseudodifférentiel tangentiel.

Définition 3.10. — *Soit $r > 0$ et $a(x_n, x', \xi', h)$ une fonction C^∞ de $(x_n, x', \xi') \in [0, r] \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, dépendant de $h \in]0, h_0]$. On dit que a est un* *symbole tangentiel d'ordre m, et on note $a \in S_t^m$ ssi pour tout j et tout multi-indice α', β', il existe une constante $C_{j,\alpha',\beta'}$ telle que*

(3.49)
$$|\partial_{x_n}^j \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} a(x,\xi,h)| \leq C_{j,\alpha',\beta'} < \xi' >^{m-|\beta'|}, \quad \forall (x_n, x', \xi') \in [0,r] \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \ \forall h \in]0,h_0].$$

Définition 3.11. — *Pour $a \in S_t^m$, on note $\mathrm{Op}(a)$ l'opérateur défini sur l'espace $C^\infty([0,r], \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}))$ par la formule*

$$\mathrm{Op}(a)(u)(x_n, x', h) = (2\pi h)^{-(n-1)} \int e^{ix'.\xi'/h} a(x_n, x', \xi', h) \hat{u}(x_n, \xi'/h) d\xi' \tag{3.50}$$

où $\hat{u}(x_n, \eta') = \int e^{-iy'.\eta'} u(x_n, y') dy'$ est la transformée de Fourier tangentielle de u. On écrit alors $A = \mathrm{Op}(a) \in \mathcal{E}_t^m$.

Les éléments de $\mathcal{E}_t^m$ opèrent donc à x_n fixé comme des opérateurs h-pseudodifférentiels en les variables x', et la variable normale x_n intervient comme un paramètre C^∞. Il en résulte que le théorème 2.1 de calcul symbolique reste valable dans ce cadre.

On a $\langle \xi' \rangle^s \in S_t^s$, et les opérateurs $\Lambda_t^s = \mathrm{Op}(\langle \xi' \rangle^s)$ vérifient toujours $\Lambda_t^s \circ \Lambda_t^{s'} = \Lambda_t^{s+s'}$ pour tous $s, s' \in \mathbb{R}$.

Définition 3.12. — *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, et tout $u \in L^2([0,r], \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}))$, on note*

$$\|u\|_{t,s}^2 = \int_0^r \|\Lambda_t^s(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 (x_n) dx_n. \tag{3.51}$$

On remarquera qu'on a $\|u\|_{t,0} = \|u\|_{L^2([0,r]\times R^{n-1})}$. Le théorème 2.2 de continuité reste aussi valable dans ce cadre :

Théorème 3.3. — *Soit $a \in S_t^m$ et $A = \mathrm{Op}(a) \in \mathcal{E}_t^m$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante C_s indépendante de $h \in]0,h_0]$ telle qu'on ait*

$$\|A(u)\|_{t,s-m} \leq C_s \|u\|_{t,s}, \quad \forall u \in L^2([0,r], H^s(\mathbb{R}^{n-1})) \tag{3.52}$$

et on a l'inégalité de Garding semiclassique tangentielle

Théorème 3.4. — *Soit K un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $a \in S_t^m$ vérifiant*

(3.53)
$$\exists C, \ \mathrm{Re}(a(x_n, x', \xi', h)) \geq C < \xi' >^m, \quad \forall (x_n, x') \in [0,r] \times K, \ \forall \xi' \in \mathbb{R}^n, \forall h \in]0,h_0].$$

Alors pour tout $C' < C$, il existe $h_1 > 0$ tel qu'on ait

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a)u|u)_{L^2([0,r]\times\mathbb{R}^{n-1})} \geq C' \|u\|_{t,m/2}^2, \\ &\qquad \forall u \in C^\infty([0,r]\times\mathbb{R}^{n-1}), \mathrm{support}(u) \subset [0,r]\times K, \quad \forall h \in]0,h_1]. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Soit $V =]-r, r[\times V'$ un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi(x_n, x')$ une fonction poids vérifiant l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur $\overline{V}$ et telle que de plus on ait

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x_n, x') \neq 0, \quad \forall (x_n, x') \in \overline{V}. \tag{3.55}$$

On pose

$$\mathbb{P} = -\partial_{x_n}^2 - R(x_n, x', \partial_{x'}). \tag{3.56}$$

Théorème 3.5. — *Soit K un compact de V' et $r' < r$. Il existe $h_1 > 0$ et $C > 0$ tels qu'on ait pour tout $h \in]0, h_1]$, et pour toute fonction $u(x_n, x') \in C^\infty([0, r[\times V')$ vérifiant $u(0, x') = 0$ et à support dans $[0, r'] \times K$*

$$\begin{aligned} & h\|e^{\varphi/h}u\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_{L^2}^2 \\ & \qquad \leq C\Big(h^4\|e^{\varphi/h}\mathbb{P}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + h^3 \int e^{2\varphi(0,x')/h}|\partial_{x_n}u|^2(0, x')dx'\Big). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Si de plus on a $\partial_{x_n}\varphi(0, x') > 0$ pour tout $x' \in V'$, alors on a la meilleure inégalité

$$h\|e^{\varphi/h}u\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_{L^2}^2 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}\mathbb{P}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \tag{3.58}$$

Remarque 3.13. — *Comme on a $P = \mathbb{P} + A_1$, où A_1 est un opérateur d'ordre 1, les inégalités (3.57) et (3.58) restent évidemment valables en remplaçant $\mathbb{P}$ par P quitte à diminuer h_1, en utilisant $Ch^4 < h^3$ pour h petit.*

Remarque 3.14. — *Si la fonction u vérifie à la fois $u(0, x') = 0$ et $\partial_{x_n}u(0, x') = 0$, il est facile de voir que (3.57) est conséquence directe du théorème 3.1, qu'on applique au prolongement de u par 0 dans $x_n < 0$. En général, on a $\partial_{x_n}u(0, x') \neq 0$, et ceci explique pourquoi une inégalité de Carleman "au bord" est différente d'une inégalité de Carleman à l'intérieur.*

Démonstration. — La preuve du théorème 3.5 va suivre celle du théorème 3.1. On pose $\mathbb{P}_\varphi = h^2 e^{\varphi/h}\mathbb{P}e^{\varphi/h}$ et $v = e^{\varphi/h}u$. Alors l'équation $\mathbb{P}u = f$ est équivalente à $\mathbb{P}_\varphi v = g$ avec $g = h^2 e^{\varphi/h} f$. On a $h\partial_{x_n}v = e^{\varphi/h}(h\partial_{x_n}u + \varphi'_{x_n}u)$. En utilisant $u(0, x') = 0$, on voit donc que prouver les inégalités (3.57) et (3.58) revient à prouver

$$\begin{aligned} & \text{(i)}\ h(\|v\|_{t,1}^2 + \|h\partial_{x_n}v\|_{t,0}^2) \leq C\Big(\|\mathbb{P}_\varphi v\|_{t,0}^2 + h\textstyle\int |h\partial_{x_n}v(0, x')|^2\, dx'\Big), \\ & \text{(ii)}\ h(\|v\|_{t,1}^2 + \|h\partial_{x_n}v\|_{t,0}^2) \leq C\|\mathbb{P}_\varphi v\|_{t,0}^2 \ \text{ dans le cas }\ \partial_{x_n}\varphi(0, x') > 0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

On écrit à nouveau $\mathbb{P}_\varphi = \widetilde{Q}_2 + i\widetilde{Q}_1$ avec $\widetilde{Q}_2 = \mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_\varphi + \mathbb{P}_\varphi^*)$ et $\widetilde{Q}_1 = \mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi) = \frac{1}{2i}(\mathbb{P}_\varphi - \mathbb{P}_\varphi^*)$, mais on prend soin de séparer dans les opérateurs $\widetilde{Q}_{1,2}$ les dérivations en la variable normale x_n et les opérateurs tangentiels. On a

(3.60)
$$\widetilde{Q}_2 = (\frac{h}{i}\partial_{x_n})^2 + Q_2,\ Q_2 \in \mathcal{E}_t^2, \quad \sigma_2(Q_2) = q_2 = R(x_n, x', \xi') - R(x_n, x', \varphi'_{x'}) - (\varphi'_{x_n})^2$$

(3.61)
$$\widetilde{Q}_1 = \frac{h}{i}\partial_{x_n} \circ \varphi'_{x_n} + \varphi'_{x_n} \circ \frac{h}{i}\partial_{x_n} + 2Q_1,\ Q_1 \in \mathcal{E}_t^1, \quad \sigma_1(Q_1) = q_1 = \underline{R}(x_n, x'; \xi', \varphi'_{x'})$$

où on a noté $\underline{R}(x_n, x'; a, b) = \sum_{j,k \le n-1} g_{j,k}(x_n, x') a_j b_k$. On note $D_n = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$, et $\langle f|g\rangle = \int f(0,x')\overline{g}(0,x')dx'$ le produit scalaire des traces sur le bord $x_n = 0$ des fonctions f et g. On a alors les formules d'intégration par parties

$$(3.62) \qquad \begin{aligned} (w_1|\widetilde{Q}_2 w_2) &= (\widetilde{Q}_2 w_1|w_2) - ih(\langle w_1|D_n w_2\rangle + \langle D_n w_1|w_2\rangle) \\ (w_1|\widetilde{Q}_1 w_2) &= (\widetilde{Q}_1 w_1|w_2) - 2ih\left\langle \varphi'_{x_n} w_1|w_2\right\rangle \end{aligned}$$

et il en résulte

(3.63)
$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2}^2 &= \|(\widetilde{Q}_2 + i\widetilde{Q}_1)v\|_{L^2}^2 = \|\widetilde{Q}_2 v\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{Q}_1 v\|_{L^2}^2 + h(\tfrac{i}{h}[\widetilde{Q}_2, \widetilde{Q}_1]v|v) + h\mathcal{B}(v) \\ \mathcal{B}(v) &= \left\langle \widetilde{Q}_1 v|D_n v\right\rangle + \left\langle D_n\widetilde{Q}_1 v|v\right\rangle - 2\left\langle \varphi'_{x_n}\widetilde{Q}_2 v|v\right\rangle = 2\left\langle \varphi'_{x_n} D_n v|D_n v\right\rangle \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité, on a utilisé $v(0,x') = 0$ et la formule (3.61). On remarque à présent que $\frac{i}{h}[\widetilde{Q}_2, \widetilde{Q}_1]$ est un opérateur différentiel d'ordre 2, et donc en utilisant les formules (3.60) et (3.61) on obtient

$$(3.64) \qquad \frac{i}{h}[\widetilde{Q}_2, \widetilde{Q}_1] = \widetilde{H}_0 D_n^2 + \widetilde{H}_1 D_n + \widetilde{H}_2 = H_0\widetilde{Q}_2 + H_1\widetilde{Q}_1 + H_2$$

avec $\widetilde{H}_k \in \mathcal{E}_t^k$ et $H_k \in \mathcal{E}_t^k$. Si on pose

$$(3.65) \qquad \widetilde{q}_2 = \xi_n^2 + q_2(x_n, x', \xi'), \quad \widetilde{q}_1 = 2(\varphi'_{x_n}\xi_n + q_1(x_n, x', \xi')),$$

l'hypothèse sur φ signifie que pour tout $(x_n, x') \in [-r, r] \times \overline{V}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(3.66) \qquad \widetilde{q}_2 = \widetilde{q}_1 = 0 \implies \{\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_1\} > 0.$$

Il en résulte

Lemme 3.15. — *Il existe μ (grand) tel qu'on ait*

$$(3.67) \qquad \frac{\mu}{\langle\xi'\rangle^2}(q_1^2 + \varphi'^2_{x_n} q_2)^2 + \sigma_2(H_2) \ge C\langle\xi'\rangle^2.$$

Démonstration. — En choisissant μ grand, on voit que le seul problème se pose près de l'ensemble Z d'équation $q_1^2 + \varphi'^2_{x_n} q_2 = 0$. Comme d'après (3.60), on a $q_2 \simeq |\xi'|^2$ pour $|\xi'|$ grand, en utilisant l'hypothèse (3.55) sur φ, et $q_1^2 \ge 0$, on voit que $|\xi'|$ est borné sur l'ensemble Z. Il suffit donc de vérifier qu'on a

$$\sigma_2(H_2)(x_n, x', \xi') > 0, \quad \forall (x_n, x', \xi') \in Z.$$

Or si $(x_n, x', \xi') \in Z$, on posant $\xi_n = -\frac{q_1}{\varphi'_{x_n}}$, on obtient $\widetilde{q}_2(x_n, x', \xi', \xi_n) = \widetilde{q}_1(x_n, x', \xi', \xi_n) = 0$. Le lemme résulte donc de (3.66), puisque d'après le théorème 2.1 et en utilisant (3.64) on a l'égalité des fonctions

$$\{\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_1\} = \sigma_0(H_0)\widetilde{q}_2 + \sigma_1(H_1)\widetilde{q}_1 + \sigma_2(H_2). \qquad \square$$

En posant

$$G = \frac{\mu}{\Lambda_t^2}(Q_1^2 + \varphi_{x_n}^{'2} Q_2) \in \mathcal{E}_t^0$$

et en utilisant l'inégalité de Garding tangentielle (3.54) et (3.63), (3.64) on obtient qu'il existe $C_0 > 0$, $h_1 > 0$ tels qu'on ait pour $h \in]0, h_1]$

(3.68)

$$\|g\|_{L^2}^2 - h\mathcal{B}(v) \geq \|\widetilde{Q}_2 v\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{Q}_1 v\|_{L^2}^2 + h\mathrm{Re}(H_0\widetilde{Q}_2 v|v) + h\mathrm{Re}(H_1\widetilde{Q}_1 v|v)$$
$$-h\mathrm{Re}((Q_1^2 + \varphi_{x_n}^{'2} Q_2)v|Gv) + C_0 h\|v\|_{t,1}^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $H_k \in \mathcal{E}_t^k$ et (3.61), on obtient

$$|h\mathrm{Re}(H_0\widetilde{Q}_2 v|v)| \leq Ch^{1/2}\|\widetilde{Q}_2 v\|_{t,0}^2 + Ch^{3/2}\|v\|_{t,0}^2$$
$$|h\mathrm{Re}(H_1\widetilde{Q}_1 v|v)| \leq Ch^{1/2}\|\widetilde{Q}_1 v\|_{t,0}^2 + Ch^{3/2}\|v\|_{t,1}^2$$
$$\|D_n v\|_{t,0}^2 \leq C\|\widetilde{Q}_1 v\|_{t,0}^2 + C\|v\|_{t,1}^2.$$

Quitte à diminuer h_1, on déduit donc de (3.68) pour un $C_1 > 0$

(3.69)

$$\|g\|_{L^2}^2 - h\mathcal{B}(v) + h\mathrm{Re}((Q_1^2 + \varphi_{x_n}^{'2} Q_2)v|Gv) \geq \frac{1}{2}(\|\widetilde{Q}_2 v\|_{L^2}^2 + \|\widetilde{Q}_1 v\|_{L^2}^2) + C_1 h(\|v\|_{t,1}^2 + \|D_n v\|_{t,0}^2).$$

On a aussi d'après (3.60) et (3.61)

$$Q_1^2 + \varphi_{x_n}^{'2} Q_2 \in \varphi_{x_n}^{'2}\widetilde{Q}_2 - \frac{1}{2}D_n \circ \varphi'_{x_n}\widetilde{Q}_1 + \mathcal{E}_t^1\widetilde{Q}_1 + h\mathcal{E}_t^0 D_n + h\mathcal{E}_t^1$$

et en utilisant $v(0, x') = 0$

$$\mathrm{Re}(D_n \circ \varphi'_{x_n}\widetilde{Q}_1|Gv) = \mathrm{Re}(\varphi'_{x_n}\widetilde{Q}_1|D_n Gv).$$

Quitte à diminuer h_1, on déduit donc de (3.69) et de $D_n G \in GD_n + h\mathcal{E}_t^0$ pour un $C_2 > 0$

$$\|g\|_{L^2}^2 - h\mathcal{B}(v) \geq C_2 h(\|v\|_{t,1}^2 + \|D_n v\|_{t,0}^2). \tag{3.70}$$

Comme on a d'après (3.63) $\mathcal{B}(v) = 2\left\langle \varphi'_{x_n} D_n v | D_n v \right\rangle$, (3.70) implique (3.59). La preuve du théorème 3.5 est complète. $\square$

Nous terminons ce paragraphe par un énoncé plus fort que celui du théorème 3.5, mais qui est une simple conséquence des théorèmes 3.1 et 3.5.

Corollaire 3.16. — *Le théorème 3.5 reste vrai sous l'hypothèse que la fonction poids $\varphi(x_n, x')$ vérifie l'hypothèse de sous ellipticité sur $\overline{V}$ et*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(0, x') \neq 0, \quad \forall x' \in \overline{V}'. \tag{3.71}$$

Démonstration. — D'après (3.71), il existe $r_1 > 0$ tel qu'on ait $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x_n, x') \neq 0$ pour tout $(x_n, x') \in [-r_1, r_1] \in \overline{V}'$. Soit $\chi_1(x_n)$ une fonction C^∞ à support dans $x_n < r_1$, telle que $\chi_1(x_n) = 1$ pour $x_n \leq r_1/2$, et $\chi_2(x_n) = 1 - \chi_1(x_n)$. On peut alors appliquer le théorème 3.1 à $\chi_2 u$ et le théorème 3.5 à $\chi_1 u$. En additionnant les inégalités ainsi obtenues, le terme de gauche ne pose pas de problème car on a $\|u\| \leq \|\chi_1 u\| + \|\chi_2 u\|$ pour toute norme $\|.\|$. Pour estimer le membre de droite, il suffit d'utiliser

$$h^4 \|e^{\varphi/h}\mathbb{P}(\chi u)\|^2_{L^2} \leq Ch^4\Big(\|e^{\varphi/h}\mathbb{P}(u)\|^2_{L^2} + \|e^{\varphi/h}[\mathbb{P}, \chi](u)\|^2_{L^2}\Big). \tag{3.72}$$

Comme $[\mathbb{P}, \chi]$ est un opérateur différentiel d'ordre 1, on a

$$h^4\|e^{\varphi/h}[\mathbb{P}, \chi](u)\|^2_{L^2} \leq Ch\Big(h\|e^{\varphi/h}u\|^2_{L^2} + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|^2_{L^2}\Big)$$

de sorte que le terme d'erreur s'absorbe dans le membre de gauche des inégalités (3.57) pour $h \in]0, h_1]$ si h_1 est assez petit. □

4. Estimations de Carleman paraboliques

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et $T > 0$ donnés. Dans cette section, on décrit les estimations de Carleman pour l'équation de la chaleur $\partial_t - \triangle$ posée sur $Q =]0, T[\times\Omega$. Comme précédemment, les résultats qui suivent restent vrais, avec les mêmes preuves, si on remplace l'opérateur $-\triangle$ par un opérateur elliptique d'ordre 2 à symbole principal réel de la forme (3.28).

On pose $\theta(t) = t(T - t)$ et $h = \epsilon\theta(t)$. Ici, $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ est une constante, mais il faut prendre garde au fait que $h = h(t)$ est une fonction de t vérifiant $h'(t) = \epsilon\theta'(t)$ et on a $h(0) = h(T) = 0$.

Soit $P = \partial_t - \triangle$. Soit $\varphi(x)$ une fonction C_b^∞ à valeurs réelles. Comme précédemment on pose $P_\varphi = h^2 e^{\varphi(x)/h} P e^{-\varphi(x)/h}$. Un calcul simple donne

$$P_\varphi = h^2\partial_t + \epsilon\varphi(x)\theta'(t) - h^2\triangle + 2h\nabla\varphi.\nabla - |\nabla\varphi|^2 + h\triangle\varphi. \tag{4.73}$$

Comme précédemment, on écrit $P_\varphi = Q_2 + iQ_1$, avec $Q_2 = \frac{1}{2}(P_\varphi + P_\varphi^*)$ et $Q_1 = \frac{1}{2i}(P_\varphi - P_\varphi^*)$. On pose $A_2 = -h^2\triangle - |\varphi'|^2$ et $A_1 = \frac{h}{i}\triangle\varphi + \frac{2h}{i}\varphi'.\nabla_x$. On obtient, avec $\varphi' = \nabla\varphi$,

$$\begin{aligned} Q_2 &= -\epsilon h\theta'(t) + \epsilon\varphi(x)\theta'(t) + A_2, \quad A_2 = -h^2\triangle - |\varphi'|^2 \\ Q_1 &= \frac{h^2}{i}\partial_t + \frac{\epsilon h}{i}\theta'(t) + A_1, \quad A_1 = \frac{h}{i}\triangle\varphi + \frac{2h}{i}\varphi'.\nabla_x. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Les opérateurs $A_2 \in \mathcal{E}^2$ et $A_1 \in \mathcal{E}^1$ ne dépendent pas de t, et leurs symboles principaux sont donnés comme précédemment par les formules

$$\begin{aligned} \sigma_2(A_2) &= q_2, \quad q_2 = |\xi|^2 - |\varphi'|^2, \\ \sigma_1(A_1) &= q_1, \quad q_1 = 2(\varphi'|\xi). \end{aligned} \tag{4.75}$$

Nous allons renforcer l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur les fonctions q_2, q_1 en introduisant l'hypothèse $(H2)$ suivante.

Définition 4.1. — *Soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. On dit que φ vérifie l'hypothèse $(H2)$ sur $\overline{V}$ ssi on a $\varphi < 0$ et $\varphi'_x \neq 0$ pour tout $x \in \overline{V}$, et s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall (x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, \quad q_2(x,\xi) = 0 \implies \{q_2, q_1\}(x,\xi) \geq C. \tag{4.76}$$

D'après la remarque (3.35) et le lemme 3.2, si ψ est une fonction C^∞ vérifiant $\psi'(x) \neq 0$ sur $\overline{V}$, la fonction $\varphi = e^{D\psi} - A$ vérifie l'hypothèse $(H2)$ sur $\overline{V}$, en choisissant d'abord D assez grand, puis en choisissant la constante A pour assurer $\varphi < 0$ sur $\overline{V}$. On remarquera que l'ensemble

$$Z = \{(x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, q_2(x,\xi) = 0\} = \{(x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, \xi^2 = |\varphi'_x|^2\}$$

est compact.

4.1. Estimations intérieures. — Nous allons dans cette section démontrer l'estimation de Carleman parabolique locale en x et globale en $t \in]0,T[$ pour $P = \partial_t - \triangle$. Le lecteur remarquera que la preuve de cette estimation est exactement la même que celle du théorème 3.1, une fois qu'on a remarqué qu'on peut remplacer l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander par l'hypothèse $(H2)$, et n'utiliser que des inégalités de Garding à t fixé.

Théorème 4.1. — *Soit K un compact de Ω et $V \subset \Omega$ un voisinage de K. Soit $\varphi(x)$ une fonction C^∞ vérifiant l'hypothèse $(H2)$ sur $\overline{V}$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, on ait, avec $h = \epsilon t(T-t)$ et $Q =]0,T[\times\Omega$*

$$\|h^{1/2} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq C \|h^2 e^{\varphi/h} Pu\|^2_{L^2(Q)} \tag{4.77}$$

pour toute fonction $u \in C^\infty([0,T] \times \Omega)$ vérifiant support$(u) \subset [0,T] \times K$.

Démonstration. — On pose $v = e^{\varphi/h} u$. L'équation $Pu = f$ est équivalente à $P_\varphi v = g$ avec $g = h^2 e^{\varphi/h} f$. Comme on a $\varphi \leq -C < 0$ sur K, la fonction C^∞ v s'annule avec toutes ses dérivées sur $t = 0$ et $t = T$. L'intégration par partie en t ne fait donc pas intervenir de termes de bord, et on obtient comme précédemment

$$\|g\|^2_{L^2(Q)} = \|(Q_2 + iQ_1)v\|^2_{L^2(Q)} = \|Q_2 v\|^2_{L^2(Q)} + \|Q_1 v\|^2_{L^2(Q)} + (i[Q_2, Q_1]v|v)_{L^2(Q)} \tag{4.78}$$

avec d'après (4.74)

$$[Q_2, Q_1] = [A_2, A_1] + \epsilon\theta'(t)[\varphi, A_1] + ih^2 \partial_t Q_2. \tag{4.79}$$

Pour $\mu > 0$, l'opérateur $\mathcal{A} = \mu A_2^2 + \frac{i}{h}[A_2, A_1]$ appartient à $\mathcal{E}^4$. D'après l'hypothèse $(H2)$, il existe $c_1 > 0$ et $\mu_1 > 0$ tels que pour tout $\mu \geq \mu_1$, son symbole principal $\sigma_4(\mathcal{A})$ vérifie

$$\sigma_4(\mathcal{A}) = \mu q_2^2 + \{q_2, q_1\} \geq c_1 \langle\xi\rangle^4, \quad \forall x \in \overline{V}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.80}$$

Fixons $\mu = \mu_1$ et posons $B_\mu = \mu Q_2^2 + \frac{i}{h}[Q_2, Q_1]$. D'après (4.78), on a

$$\|g\|^2_{L^2(Q)} \geq ((1 - h\mu)Q_2^2 v|v)_{L^2(Q)} + (hB_\mu v|v)_{L^2(Q)}. \tag{4.81}$$

Si ϵ_0 vérifie $\epsilon_0 T^2 \leq \mu^{-1}$, on a $1 - h\mu = 1 - \epsilon\theta(t)\mu \geq 1/2$ pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$. D'après la première ligne de (4.74), Q_2 ne contient pas de dérivation en t ; on a donc l'identité $(1 - h\mu)Q_2^2 = ((1 - \epsilon\mu\theta(t))^{1/2}Q_2)^2$. L'opérateur $(1 - \epsilon\mu\theta(t))^{1/2}Q_2$ est autoadjoint et B_μ est un opérateur différentiel en x à coefficients C^∞ en (ϵ, t). Donc l'inégalité (4.77) sera conséquence comme dans la preuve du théorème 3.1 de l'inégalité
(4.82)

$$(hB_\mu v|v)_{L^2(Q)} = \int_0^T h(t)(\int_\Omega (B_\mu v|v)_{L^2(\Omega)} dx)dt \geq c(\|h^{1/2}v\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2}\nabla_x v\|^2_{L^2(Q)})$$

avec $c > 0$ indépendant de $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ et ϵ_0 petit. Il suffit donc de prouver qu'il existe ϵ_0, h_0 petit et $c_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, et tout $t \in [0, T]$, on a

$$(B_\mu v|v)_{L^2(\Omega)} \geq c_0(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\nabla_x v\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{4.83}$$

On écrit $B_\mu = B_\mu(\epsilon, t)$ avec

$$\begin{aligned} B_\mu(\epsilon, t) = \mu\Big(A_2^2 + 2\epsilon\theta'(t)A_2(\varphi(x) - h) + \epsilon^2\theta'(t)^2(\varphi(x) - h)^2\Big) \\ + \frac{i}{h}[A_2, A_1] + \epsilon\theta'(t)\frac{i}{h}[\varphi, A_1] - h\partial_t Q_2. \end{aligned} \tag{4.84}$$

On obtient donc que $(\epsilon, t) \to B_\mu(\epsilon, t)$ est une famille C^∞ en (ϵ, t) à valeurs dans $\mathcal{E}^4$ et son symbole principal vaut d'après le théorème (2.1)

$$\sigma_4(B_\mu) = \mu q_2^2 + \{q_2, q_1\} + \epsilon(2\mu\theta' q_2\varphi + \epsilon\mu\theta'^2\varphi^2 + \theta'\{\varphi, q_1\}). \tag{4.85}$$

Si ϵ_0 est assez petit, on a donc d'après (4.80) pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ et tout $t \in [0, T]$

$$\sigma_4(B_\mu) \geq c_1 \langle\xi\rangle^4 /2, \quad \forall x \in \overline{V},\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.86}$$

L'inégalité (4.83) est donc conséquence de l'inégalité de Garding (2.17), la preuve du théorème 2.3 s'adaptant sans modification au cas d'une famille d'opérateurs $\mathrm{Op}(a), a \in S^m$ dépendant continuement d'un paramètre. La preuve du théorème (4.1) est complète. □

4.2. Estimations au bord. — Nous allons dans cette section démontrer l'estimation de Carleman parabolique au bord de Ω, globale en $t \in]0, T[$, pour $P = \partial_t - \triangle$. La preuve de cette estimation diffère sensiblement de celle du théorème 3.5. On sera amené à utiliser le théorème 4.3 qui est une "inégalité de Garding "au bord". Par contre, comme dans la preuve du théorème 4.1, on se ramènera à prouver une estimation à t fixé, uniforme en $t \in [0, T]$.

Rappelons qu'on a posé $P = \partial_t - \triangle$ et $h = \epsilon\theta(t) = \epsilon t(T - t)$. Dans ce paragraphe, on conserve les notations du paragraphe 3.2 sur les estimations de Carleman elliptiques au bord. En particulier, (x_n, x') est un système de coordonnées géodésiques normales centré en un point $x_0 \in \partial\Omega$. Pour $u(t, x_n, x') \in L^2([0, T] \times [0, r], \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $s \in \mathbb{R}$, on notera dans ce paragraphe

$$\|u\|^2_{tg,s}(t) = \int_0^r \|\Lambda_t^s(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}(t, x_n)dx_n \tag{4.87}$$

la norme tangentielle H^s de u à t fixé introduite en (3.51). On a $\|u\|_{tg,s}(t) \in L^2(0,T)$. De même, on notera $\mathcal{E}^m_{\mathrm{tg}}$ l'espace des opérateurs tangentiels en x d'ordre m à coefficients indépendants de la variable t et on notera $\mathcal{E}_{\mathrm{tg}} = \bigcup_m \mathcal{E}^m_{\mathrm{tg}}$, $\mathcal{E}^{-\infty}_{\mathrm{tg}} = \bigcap_m \mathcal{E}^m_{\mathrm{tg}}$.

Théorème 4.2. — *Soit $V =]-r, r[\times V'$ un voisinage de $(x_n, x') = (0,0)$ dans $\mathbb{R}^n$, K un compact de V' et $r' < r$. Soit $\varphi(x_n, x')$ une fonction C^∞ vérifiant l'hypothèse $(H2)$ sur $\overline{V}$ et telle que de plus on ait*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(0,x') > 0, \quad \forall (0,x') \in \overline{V}. \tag{4.88}$$

Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, on a

$$\|h^{1/2}e^{\varphi/h}u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2}e^{\varphi/h}\nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq C\|h^2 e^{\varphi/h}Pu\|^2_{L^2(Q)} \tag{4.89}$$

pour toute fonction $u \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ vérifiant $\mathrm{support}(u) \subset [0,T]\times[0,r']\times K$ *et la condition au bord $u(t,0,x') = 0$.*

Démonstration. — On commence par remarquer qu'il suffit de prouver l'inégalité (4.89) en remplacant $P = \partial_t - \triangle$ par $\mathbb{P} = \partial_t - \partial^2_{x_n} - R(x_n, x', \partial_{x'})$, où l'opérateur tangentiel du second ordre $R(x_n, x', \partial_{x'})$ est défini en (3.48), puisque la différence $P - \mathbb{P}$ est un opérateur différentiel en x d'ordre au plus 1.

La preuve commence comme celle du théorème 3.5. On pose $\mathbb{P}_\varphi = h^2 e^{\varphi/h}\mathbb{P}e^{\varphi/h}$ et $v = e^{\varphi/h}u$. Alors l'équation $\mathbb{P}u = f$ est équivalente à $\mathbb{P}_\varphi v = g$ avec $g = h^2 e^{\varphi/h} f$. En utilisant $u(0,x') = 0$ et $h\partial_{x_n} v = e^{\varphi/h}(h\partial_{x_n}u + \varphi'_{x_n}u)$, on voit que prouver l'inégalité (4.89) revient à prouver qu'il existe $C > 0$ indépendant de $\epsilon \in]0,\epsilon_0]$ tel qu'on ait

$$\int_0^T h(t)(\|v\|^2_{tg,1}(t) + \|h\partial_{x_n}v\|^2_{\mathrm{tg},0}(t))dt \leq C\int_0^T \|\mathbb{P}_\varphi v\|^2_{\mathrm{tg},0}(t)dt. \tag{4.90}$$

On écrit à nouveau $\mathbb{P}_\varphi = \mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi) + i\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)$. On a d'après les formules (3.60), (3.61) et (4.74)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi) = -\epsilon h\theta'(t) + \epsilon\varphi(x)\theta'(t) + \widetilde{Q}_2\\
&\widetilde{Q}_2 = (\frac{h}{i}\partial_{x_n})^2 + Q_2,\ Q_2 \in \mathcal{E}^2_{\mathrm{tg}}\\
&\sigma_2(Q_2) = q_2 = R(x_n, x', \xi') - R(x_n, x', \varphi'_{x'}) - (\varphi'_{x_n})^2
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi) = \frac{h^2}{i}\partial_t + \frac{\epsilon h}{i}\theta'(t) + \widetilde{Q}_1\\
&\widetilde{Q}_1 = \frac{h}{i}\partial_{x_n}\circ\varphi'_{x_n} + \varphi'_{x_n}\circ\frac{h}{i}\partial_{x_n} + 2Q_1,\ Q_1 \in \mathcal{E}^1_t\\
&\sigma_1(Q_1) = q_1 = \underline{R}(x_n, x'; \xi', \varphi'_{x'}).
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Rappelons qu'on note $D_n = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$, et on notera ici

$$\langle f|g\rangle = \int_0^T\int f(t,0,x')\overline{g}(0,x')dx'dt$$

le produit scalaire des traces sur le bord $x_n = 0$ des fonctions f et g. Comme on a $\varphi \leq -C < 0$ sur $\overline{V}$, la fonction v est plate en $t = 0$ et $t = T$, et les formules d'intégration par parties (3.62) et $u(t, 0, x') = 0$ donnent

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}_\varphi(v)\|^2_{L^2(Q)} &= \|(\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi) + i\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi))v\|^2_{L^2(Q)} \\ &= \|\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi)v\|^2_{L^2(Q)} + \|\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)v\|^2_{L^2(Q)} \\ &\quad + (i[\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi), \mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)]v|v)_{L^2(Q)} + \mathcal{B}(v)\end{aligned} \tag{4.93}$$

avec

$$\mathcal{B}(v) = \langle h\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)|D_n v\rangle + \langle hD_n\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)v|v\rangle - 2\left\langle h\varphi'_{x_n}\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi)v|v\right\rangle = 2\left\langle h\varphi'_{x_n}D_n v|D_n v\right\rangle \tag{4.94}$$

où dans la dernière égalité, on a utilisé $v(t, 0, x') = 0$. On remarque à présent qu'on a

$$[\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi), \mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)] = [\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1] + \epsilon\theta'(t)[\varphi, \tilde{Q}_1] + ih^2\partial_t(\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi)) \tag{4.95}$$

donc d'après les formules (4.91) et (4.92), $[\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi), \mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)]$ est un opérateur différentiel en x d'ordre 2 à coefficients C^∞ en t. Il en est de même de l'opérateur $\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi)$. Il en résulte que l'inégalité (4.90) sera conséquence de l'inégalité

$$h(\|v\|^2_{tg,1} + \|h\partial_{x_n}v\|^2_{\mathrm{tg},0})(t) \leq c_0\Big(\|\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi)v\|^2_{L^2(\Omega)} + h(\frac{i}{h}[\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi), \mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)]v|v)_{L^2(\Omega)}\Big)(t) \tag{4.96}$$

avec $c_0 > 0$ indépendant de $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ et de $t \in [0, T]$. On remarquera que comme dans la preuve du théorème 4.1, le fait de se ramener à la preuve de l'inégalité à t fixé (4.96) nous force à ne pas utiliser le terme positif $\|\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)v\|^2_{L^2(Q)}$ dans la formule (4.93), car l'opérateur $\mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)$ contient une dérivée en t d'après (4.92). On notera que la preuve de l'inégalité (4.96) va utiliser la condition aux limites $v|_{x_n=0} = 0$. Posons $Q = \mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi)$ et $A = \frac{i}{h}[\mathrm{Re}(\mathbb{P}_\varphi), \mathrm{Im}(\mathbb{P}_\varphi)]$. Comme dans la preuve du théorème 4.1, on est ramené à prouver, qu'il existe $\mu > 0$ grand et $c_0 > 0, \epsilon_0 > 0, h_0 > 0$ petits, indépendants de $t \in [0, T]$, tels qu'on ait pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ et tout $h \in]0, h_0]$

$$\Big(\mu\|Qv\|^2_{L^2(\Omega)} + (Av|v)_{L^2(\Omega)}\Big)(t) \geq c_0(\|v\|^2_{tg,1} + \|h\partial_{x_n}v\|^2_{\mathrm{tg},0})(t). \tag{4.97}$$

Or ceci est conséquence de l'inégalité de Garding au bord (4.100). En effet, les opérateurs Q et A vérifient uniformément en $t \in [0, T]$ et $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ les hypothèses (4.99). La première ligne de (4.99) résulte de la formule (4.91), et l'hypothèse $(H2)$ implique la deuxième ligne de (4.99) puisqu'on a $q = \sigma(\tilde{Q}_2) + O(\epsilon)$ et $a = \sigma([\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_1]) + O(\epsilon)$. La preuve du théorème 4.2 est complète. □

Remarque 4.2. — *Lorsque la fonction φ ne vérifie pas la condition* (4.88)*, la même preuve (voir* (4.93)*) donne qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, on a*

$$\begin{aligned}&\|h^{1/2}e^{\varphi/h}u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2}e^{\varphi/h}\nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \\ &\qquad \leq C\big(\|h^2e^{\varphi/h}Pu\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^T h^3\int e^{2\varphi(0,x')/h}|\partial_{x_n}u(t, 0, x')|^2dx'dt\big)\end{aligned} \tag{4.98}$$

pour toute fonction $u \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ *vérifiant support*$(u)\subset[0,T]\times[0,r']\times K$ *et la condition au bord* $u(t,0,x')=0$.

Nous terminons ce paragraphe par la preuve de l'inégalité de Garding "au bord" que nous avons utilisée dans la preuve du théorème 4.2. On se donne des opérateurs tangentiels $B(x_n,x',\partial_{x'})\in\mathcal{E}^2_{\rm tg}$ de symbole principal réel $b(x_n,x',\xi')$, et pour $j=0,1,2$, $A_j(x_n,x',\partial_{x'})\in\mathcal{E}^j_{\rm tg}$ de symboles principaux réels $a_j(x_n,x',\xi')$. On note $D_n=\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$, $x=(x',x_n)$, $\xi=(\xi',\xi_n)$ et

$$Q=D_n^2-B,\quad A=A_2+A_1D_n+A_0D_n^2$$

$$q(x,\xi)=\xi_n^2-b(x_n,x',\xi'),\quad a(x,\xi)=a_2(x_n,x',\xi')+a_1(x_n,x',\xi')\xi_n+a_0(x_n,x',\xi')\xi_n^2.$$

Théorème 4.3 **(Inégalité de Garding semi-classique au bord).** — *Soit* $V=V'\times]-r,r[$ *un voisinage de* $(x',x_n)=(0,0)$ *dans* $\mathbb{R}^n$. *Soit* K *un compact de* V' *et* $r'\in]0,r[$. *On suppose que les symboles* q,b *et* a *vérifient, avec des constantes* $M>0,m>0$

$$\begin{aligned}&b(x',x_n,\xi')\le M-m|\xi'|^2,\quad\forall(x,\xi')\in\overline{V}\times\mathbb{R}^{n-1}\\&q(x,\xi)=0\ \Rightarrow\ a(x,\xi)>0,\quad\forall(x,\xi)\in\overline{V}\times\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{4.99}$$

Alors il existe $h_0>0$, $c_0>0$ *petits, et* $\mu>0$ *grand tels qu'on ait pour tout* $h\in]0,h_0]$

$$\mu\|Qu\|^2_{L^2(W)}+(Au|u)_{L^2(W)}\ge c_0(\|u\|^2_{tg,2}+\|D_nu\|^2_{tg,1}+\|D_n^2u\|^2_{\rm tg,0})\tag{4.100}$$

avec $W=\mathbb{R}^{n-1}\times]0,r[$, *pour toute fonction* $u(x',x_n)\in C^\infty(\overline{V}'\times[0,r])$ *vérifiant* support$(u)\subset K\times[0,r']$ *et la condition au bord* $u|_{x_n=0}=0$.

Remarque 4.3. — *L'opérateur* μQ^*Q+A *a pour symbole* $\mu|q|^2+a$. *La première ligne de* (4.99) *implique que l'ensemble* $Z=\{(x,\xi)\in\overline{V}\times\mathbb{R}^n,\ q(x,\xi)=0\}$ *est compact. La deuxième ligne de* (4.99) *implique donc qu'il existe une constante* $c_1>0$ *telle qu'on ait* $\mu|q|^2+a\ge c_1\langle\xi\rangle^4$ *pour* $\mu>0$ *assez grand et tout* $(x,\xi)\in\overline{V}\times\mathbb{R}^n$. *Les inégalités de Garding usuelles, (adaptées au cas de l'opérateur* μQ^*Q+A *qui n'est ni un h-pseudodifférentiel, ni un opérateur tangentiel) impliquent alors que l'inégalité* (4.100) *est vraie pour* u *à support dans* $[r",r']\times K$ *avec* $r">0$. *Toutefois, l'inégalité* (4.100) *n'a aucune chance d'être vraie sans aucune condition aux limites sur* u *en* $x_n=0$. *Il suffit pour s'en convaincre de prendre* $B=h^2\triangle_{x'}$ *et* $A=A_2=1$. *L'hypothèse* (4.99) *est alors satisfaite, mais l'inégalité* (4.99) *est fausse quel que soit* μ. *(prendre* $u=\chi(x)v$ *avec* $v\in H^1(x_n>0)$ *vérifiant* $\triangle v=0$, *et* $\chi\in C_0^\infty$ *égal à 1 près de 0 : l'inégalité entrainerait* $\nabla^2u\in L^2(x_n>0)$ *qui est faux en général).*

Démonstration. — Dans toute la preuve, on notera

$$\mathcal{N}(u)=\|u\|^2_{tg,2}+\|D_nu\|^2_{tg,1}+\|D_n^2u\|^2_{\rm tg,0}.$$

On commence par se ramener au cas $A_0=0$. On a $A=A_0Q+A_1D_n+\tilde{A}_2$, avec $\tilde{A}_2=A_2+A_0B\in\mathcal{E}^2_{\rm tg}$. On pose $\tilde{A}=A_1D_n+\tilde{A}_2$. Le symbole de $\tilde{A}$ est $\tilde{a}=a_1\xi_n+$

$a_2 + a_0 b = a - a_0 q$, donc le triplet $(b, q, \tilde{a})$ vérifie (4.99). Supposons prouvé qu'il existe $h_0 > 0$, $c_0 > 0$ petits, et $\mu > 0$ grand tels qu'on ait pour tout $h \in]0, h_0]$

$$\mu \|Qu\|^2_{L^2(W)} + (\tilde{A}u|u)_{L^2(W)} \geq c_0\ \mathcal{N}(u). \tag{4.101}$$

Comme on a $(Au|u) = (\tilde{A}u|u) + (A_0 Qu|u)$, et $|(A_0 Qu|u)| \leq C\|Qu\|\|u\|$ on déduit de (4.101)

$$\mu \|Qu\|^2_{L^2(W)} + (Au|u)_{L^2(W)} \geq c_0\ \mathcal{N}(u) - C\|Qu\|_{L^2(W)}\|u\|_{L^2(W)}. \tag{4.102}$$

En utilisant $\|Qu\|\|u\| \leq \epsilon\|u\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|Qu\|^2 \leq \epsilon\, \mathcal{N}(u) + \frac{1}{\epsilon}\|Qu\|^2$, avec le choix $C\epsilon = c_0/2$, on obtient l'inégalité (4.100) en diminuant c_0 en $c_0/2$ et en augmentant μ en $\mu + C/\epsilon$.

On suppose désormais $A_0 = 0$. En utilisant la condition au bord $u|_{x_n=0} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\|Qu\|^2_{L^2(W)} = \|D_n^2 u\|^2_{L^2(W)} &+ \|Bu\|^2_{L^2(W)} \\ &- 2\mathrm{Re}(BD_n u|D_n u)_{L^2(W)} - 2h\mathrm{Im}((\partial_{x_n} B)u|D_n u)_{L^2(W)}.\end{aligned}$$

L'inégalité (4.100) revient donc à prouver

$$\begin{aligned}\mu\big(\|D_n^2 u\|^2_{L^2(W)} + \|Bu\|^2_{L^2(W)} - 2\mathrm{Re}(BD_n u|D_n u)_{L^2(W)}\big) + (A_2 u|u)_{L^2(W)} \\ \geq c_0\ \mathcal{N}(u) - (A_1 D_n u|u)_{L^2(W)} + 2h\mu\mathrm{Im}((\partial_{x_n} B)u|D_n u)_{L^2(W)}.\end{aligned} \tag{4.103}$$

Comme $B \in \mathcal{E}^2_{\mathrm{tg}}$, on a $|(\partial_{x_n} B)u|D_n u)| \leq C\|u\|_{tg,2}\|D_n u\|_{\mathrm{tg},0} \leq C\ \mathcal{N}(u)$. Donc le dernier terme de la deuxième ligne de (4.103) s'absorbe dans le terme $c_0\ \mathcal{N}(u)$ pour h petit. Il suffit donc de prouver qu'il existe $h_0 > 0$, $c_0 > 0$ petits, et $\mu > 0$ grand tels qu'on ait pour tout $h \in]0, h_0]$

$$\begin{aligned}\mu\big(\|D_n^2 u\|^2_{L^2(W)} + \|Bu\|^2_{L^2(W)} - 2\mathrm{Re}(BD_n u|D_n u)_{L^2(W)}\big) + (A_2 u|u)_{L^2(W)} \\ \geq c_0\ \mathcal{N}(u) + |(A_1 D_n u|u)_{L^2(W)}|.\end{aligned} \tag{4.104}$$

Soit $\chi_j = \mathrm{Op}(\chi_j(x, \xi')) \in \mathcal{E}^0_{\mathrm{tg}}, 1 \leq j \leq N$, une famille finie d'opérateurs tangentiels de degré 0 avec $\sum_j |\chi_j(x, \xi')|^2 = 1$ pour $x \in \overline{V}$ et tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. On a d'après la définition des normes tangentielles (3.51) et le théorème 3.3

$$|\mathcal{N}(u) - \sum_j \mathcal{N}(\chi_j u)| \leq Ch\mathcal{N}(u)$$

et pour tout opérateur $R \in \mathcal{E}^m_{\mathrm{tg}}$ et tout $f(x_n, x') \in C_0^\infty([0, r[, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}))$,

$$|(Rf|f)_{L^2(W)} - \sum_j (R\chi_j f|\chi_j f)_{L^2(W)}| \leq Ch\|f\|_{tg,p}\|f\|_{tg,q}, \quad p + q = m - 1.$$

Il en résulte qu'il suffit de prouver qu'il existe $h_0 > 0$, $c_0 > 0$ petits, et $C_j, \mu > 0$ grands tels qu'on ait pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ les inégalités,

$$\begin{aligned}\mu\Big(\|D_n^2 \chi_j u\|^2_{L^2(W)} + \|B\chi_j u\|^2_{L^2(W)} - 2\mathrm{Re}(BD_n\chi_j u|D_n\chi_j u)_{L^2(W)}\Big) \\ +(A_2\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)} \geq c_0\ \mathcal{N}(\chi_j u) + |(A_1 D_n\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)}| - C_j h\mathcal{N}(u).\end{aligned} \tag{4.105}$$

On choisit alors d'abord $\chi_1 = \mathrm{Op}(\chi_1(x,\xi'))$ à support dans $|\xi'| \geq L$ et égal à 1 pour $|\xi'| \geq 2L$. D'après la première ligne de (4.99) pour $L^2 \geq 2M/m$, on a $-b(x,\xi') \geq c < \xi' >^2$ avec $c > 0$ sur le support de χ_1, d'où il résulte

$$\|D_n^2\chi_1 u\|^2_{L^2(W)} + \|B\chi_1 u\|^2_{L^2(W)} - 2\mathrm{Re}(BD_n\chi_1 u|D_n\chi_1 u)_{L^2(W)} \geq c_1\, \mathcal{N}(\chi_1 u) - C_1 h\, \mathcal{N}(u)$$

avec $c_1 > 0, C_1 > 0$, ce qui implique (4.105) pour μ assez grand puisqu'on a $A_j \in \mathcal{E}^j_{\mathrm{tg}}$.

Pour construire les $\chi_j = \mathrm{Op}(\chi_j(x,\xi')), j \geq 2$, on commence par prouver que l'inégalité (4.105) est vraie avec $C_j = 0$ lorsqu'on remplace les opérateurs A_j et B par les constantes $a_j(x_0,\xi'_0)$ et $b(x_0,\xi'_0)$ avec $x_0 \in \overline{V}$ et $|\xi'| \leq 4L$. Soit $\mathcal{P}$ le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{P} = \{(a_1,a_2,b),\ \exists(x,\xi') \in \overline{V}\times\{|\xi'| \leq 4L\},\ a_1 = a_1(x,\xi'),\ a_2 = a_2(x,\xi'),\ b = b(x,\xi')\}.$$

D'après (4.99), il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait

$$(a_1,a_2,b) \in \mathcal{P} \text{ et } b \geq 0 \implies a_2 \geq |a_1|\sqrt{b} + \alpha. \tag{4.106}$$

Il en résulte qu'il existe $c_0 > 0$ et $\mu > 0$, tels que pour tout $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ vérifiant $y^2 \leq xz$ et tout $(a_1,a_2,b) \in \mathcal{P}$ on ait

$$\mu(z^2 - 2by^2 + b^2x^2) + a_2x^2 \geq c_0(x^2+y^2+z^2) + |a_1|xy. \tag{4.107}$$

En effet, cette affirmation est facile à vérifier :

Si $b \geq 0$, il suffit de vérifier

$$\mu(z-bx)^2 + (|a_1|\sqrt{b}+\alpha)x^2 \geq c_0(x+z)^2 + |a_1|x^{3/2}z^{1/2}$$

qui est vrai pour $x = 0$ dès que $\mu \geq c_0$, et pour $x > 0$ et $z = tx$ équivaut à

$$\mu(t-b)^2 + |a_1|\sqrt{b} + \alpha \geq c_0(t+1)^2 + |a_1|t^{1/2}, \quad \forall t \geq 0.$$

Cette inégalité est vraie dans un voisinage de $t = b$ pour c_0 assez petit car on a $\alpha > 0$ et $|a_1|$ est borné ; elle est donc vraie pour μ assez grand et c_0 assez petit car b est borné.

Si $b < 0$, on commence par remarquer que la compacité de $\mathcal{P}$ et (4.106) entraine qu'il existe $l > 0$ tel qu'on ait

$$(a_1,a_2,b) \in \mathcal{P} \text{ et } b \in [-l,0[\Rightarrow a_2 \geq \alpha/2.$$

Pour $b \in [-l,0[$ il suffit donc de vérifier

$$\mu z^2 + \alpha x^2/2 \geq c_0(x+z)^2 + |a_1|x^{3/2}z^{1/2}$$

qui est vrai pour $x = 0$ dès que $\mu \geq c_0$, et pour $x > 0$ et $z = tx$ équivaut à

$$\mu t^2 + \alpha/2 \geq c_0(1+t)^2 + |a_1|t^{1/2}$$

qui est vrai pour μ assez grand et c_0 assez petit . Enfin pour $b \leq -l$, il suffit de vérifier

$$\mu(z^2 + l^2x^2) \geq c_0(x+z)^2 + |a_1|x^{3/2}z^{1/2} + |a_2|x^2$$

qui est évident pour μ assez grand et c_0 assez petit car $|a_1|$ et $|a_2|$ sont bornés.

Posons

$$\mathcal{N}'(\chi_j u) = \|\chi_j u\|^2_{\mathrm{tg},0} + \|D_n\chi_j u\|^2_{\mathrm{tg},0} + \|D_n^2\chi_j u\|^2_{\mathrm{tg},0}$$

$$x = \|\chi_j u\|_{\mathrm{tg},0}, \quad y = \|D_n\chi_j u\|_{\mathrm{tg},0}, \quad z = \|D_n^2\chi_j u\|_{\mathrm{tg},0}.$$

On remarquera que par intégration par parties, en utilisant $u|_{x_n=0} = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a l'inégalité $y^2 \leq xz$. D'après (4.107) on a donc pour tout $(a_1, a_2, b) \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}\mu\big(\|D_n^2\chi_j u\|^2_{L^2(W)} + \|b\chi_j u\|^2_{L^2(W)} - 2\mathrm{Re}(bD_n\chi_j u|D_n\chi_j u)_{L^2(W)}\big)&\\ +(a_2\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)} \geq c_0\, \mathcal{N}'(\chi_j u) + |(a_1D_n\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)}|&.\end{aligned} \tag{4.108}$$

Comme $\chi_j(x,\xi')$ est à support dans $|\xi'| \leq 4L$, il existe une constante c_L ne dépendant que de L, et une constante C qui elle dépend aussi de χ_j, telles qu'on ait $\mathcal{N}(\chi_j u) \leq c_L\mathcal{N}'(\chi_j u) + Ch\mathcal{N}(u))$. Il en résulte qu'il existe $c_0 > 0$ et $\mu > 0$, et pour tout $j \in \{2,\dots,N\}$ des constantes C_j, telles que pour tout $(a_1, a_2, b) \in \mathcal{P}$ on ait

$$\begin{aligned}\mu\big(\|D_n^2\chi_j u\|^2_{L^2(W)} + \|b\chi_j u\|^2_{L^2(W)} - 2\mathrm{Re}(bD_n\chi_j u|D_n\chi_j u)_{L^2(W)}\big)&\\ +(a_2\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)} \geq c_0\, \mathcal{N}(\chi_j u) + |(a_1D_n\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)}| - C_jh\mathcal{N}(u)&.\end{aligned} \tag{4.109}$$

Soit $(x_0, \xi_0') \in \overline{V} \times \{|\xi'| \leq 4L\}$, $\rho > 0$ et $\chi(x,\xi') \in C_0^\infty(|x - x_0| < \rho, |\xi' - \xi_0'| < \rho)$. Soit $R \in \mathcal{E}_{\mathrm{tg}}$ de symbole principal r. On pose $\beta(r,\rho) = \sup_{|x-x_0|<2\rho, |\xi'-\xi_0'|<2\rho} |r(x,\xi')|$. Pour tout $\gamma > 1$, il existe une constante $C = C(\gamma, \rho, \beta(r,\rho), R, \chi)$ telle qu'on ait

$$\begin{cases} \|R\mathrm{Op}(\chi)u\|_{\mathrm{tg},0} \leq \gamma\beta(r,\rho)\|\mathrm{Op}(\chi)u\|_{\mathrm{tg},0} + Ch\|u\|_{\mathrm{tg},0}, \\ \|RD_n\mathrm{Op}(\chi)u\|_{\mathrm{tg},0} \leq \gamma\beta(r,\rho)\|D_n\mathrm{Op}(\chi)u\|_{\mathrm{tg},0} + Ch(\|u\|_{\mathrm{tg},0} + \|D_nu\|_{\mathrm{tg},0}). \end{cases} \tag{4.110}$$

La preuve de (4.110) est analogue à la preuve de l'inégalité de Garding. On remarque d'abord qu'il suffit de traiter le terme $R\mathrm{Op}(\chi)u$ car $[D_n, \mathrm{Op}(\chi)] \in h\mathcal{E}_{\mathrm{tg}}^{-\infty}$. Si $\beta = \beta(r,\rho) = 0$, on a $R\mathrm{Op}(\chi) \in h\mathcal{E}^0_{\mathrm{tg}}$, et l'inégalité résulte du théorème 3.3. Si $\beta \neq 0$, en remplaçant R par R/β, on se ramène à $\beta = 1$. On choisit $\theta(x,\xi') \in C_0^\infty(|x - x_0| < 2\rho, |\xi' - \xi_0'| < 2\rho)$, $0 \leq \theta \leq 1$, et $\theta = 1$ au voisinage du support de χ. On pose $\tilde{R} = R\mathrm{Op}(\theta)$. On a $\|R(1 - \mathrm{Op}(\theta))\mathrm{Op}(\chi)u\|_{\mathrm{tg},0} \leq Ch\|u\|_{\mathrm{tg},0}$ et il suffit de prouver, avec $f = \mathrm{Op}(\chi)u$

$$\|\tilde{R}f\|_{\mathrm{tg},0} \leq (\gamma + Ch)\|f\|_{\mathrm{tg},0}.$$

On conclut en remarquant que la preuve de l'inégalité de Garding pour l'opérateur $\gamma^2 - \tilde{R}^*\tilde{R}$ dont le symbole est partout minoré par $\gamma^2 - 1 > 0$ implique $\|\tilde{R}f\|^2_{\mathrm{tg},0} \leq (\gamma^2 + Ch)\|f\|^2_{\mathrm{tg},0}$.

Pour tout $\rho \in]0,1]$, on choisit une famille finie $(x_{0,j}, \xi'_{0,j})$, $2 \leq j \leq N$, telle que les ouverts $U_{j,\rho} = \{|x - x_{0,j}| < \rho, |\xi' - \xi'_{0,j}| < \rho\}$ recouvrent le compact $T = \overline{V} \times \{|\xi'| \leq 4L\}$. On choisit alors les $\chi_j \in C_0^\infty(U_{j,\rho})$ tels qu'on ait $\sum |\chi_j|^2 = 1$ au voisinage de

T. On a, avec une constante M ne dépendant que des symboles b, a_1, a_2, et pour tout $j \in \{2, \dots N\}$

$$\sup_{U_{j,2\rho}} |b(x,\xi') - b(x_{0,j}, \xi'_{0,j})| + |a_1(x,\xi') - a_1(x_{0,j}, \xi'_{0,j})| + |a_2(x,\xi') - a_2(x_{0,j}, \xi'_{0,j})| \leq M\rho.$$

De (4.110) et (4.109) on déduit, avec une constante M ne dépendant que des symboles b, a_1, a_2

$$\begin{aligned} &\mu\big(\|D_n^2\chi_j u\|^2_{L^2(W)} + \|B\chi_j u\|^2_{L^2(W)} - 2\mathrm{Re}(BD_n\chi_j u|D_n\chi_j u)_{L^2(W)}\big) \\ &\quad + (A_2\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)} \geq c_0\, \mathcal{N}(\chi_j u) \\ &\qquad + |(A_1 D_n\chi_j u|\chi_j u)_{L^2(W)}| - C_j h\mathcal{N}(u) - M(1+\mu)\rho\mathcal{N}(\chi_j u). \end{aligned} \tag{4.111}$$

On choisit alors $\rho > 0$ assez petit pour avoir $M(1+\mu)\rho < c_0/2$. On a donc prouvé l'inégalité (4.105). On notera que les constantes C_j dépendent de ρ, mais que ρ ne dépend que des constantes μ, c_0 intervenant dans (4.107) et des symboles b, a_1, a_2. La preuve du théorème 4.3 est complète. □

5. Interpolation et inégalités spectrales

Dans cette section, Ω désigne un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On se donne $s_0 > 0$, $\alpha \in]0, s_0/2[$, et on pose

$$Z =]0, s_0[\times\Omega, \quad Y =]\alpha, s_0 - \alpha[\times\Omega. \tag{5.112}$$

On note $A = -\partial_s^2 - \triangle$ ou $\triangle$ est le laplacien sur $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement un opérateur elliptique d'ordre deux de la forme (3.28).

5.1. Inégalités d'interpolation.

— Le but de cette section est de prouver le théorème suivant, que nous allons déduire des estimations de Carleman elliptiques prouvées dans la section 3.

Théorème 5.1. — *Soit ω un ouvert non vide contenu dans Ω. Il existe $C > 0$ et $\delta \in]0, 1[$, tels que l'on ait*

$$\|u\|_{H^1(Y)} \leq C\|u\|^{1-\delta}_{H^1(Z)}(\|Au\|_{L^2(Z)} + \|\partial_s u(0,x)\|_{L^2(\omega)})^\delta \tag{5.113}$$

pour toute fonction $u(s,x) \in H^2(Z)$ vérifiant les conditions au bord

$$\forall s \in]0, s_0[,\ u(s,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \forall x \in \Omega,\ u(0,x) = 0. \tag{5.114}$$

Démonstration. — On note $z = (s,x)$, et pour $z \in [0, s_0] \times \overline{\Omega}$, on note

$$B(z,r) = \{z' = (s',x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ |s'-s|^2 + |x'-x|^2 < r^2\}$$

la boule euclidienne ouverte de centre z et de rayon $r > 0$. Pour $u \in H^2(Z)$ vérifiant les conditions au bord (5.114), on notera

$$\Theta = \|Au\|_{L^2(Z)} + \|\partial_s u(0,x)\|_{L^2(\omega)}.$$

Vérifions d'abord que le théorème 5.1 est conséquence de la propriété suivante :

$$\forall z \in \,]0, s_0[\times\overline{\Omega}, \quad \exists r > 0, C > 0, \delta \in \,]0,1[\quad \text{tels que}$$

$$\|u\|_{H^1(B(z,r)\cap Z)} \leq C\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta}\Theta^\delta \tag{5.115}$$

avec des constantes r, C, δ indépendantes de $u \in H^2(Z)$ vérifiant les conditions au bord (5.114). Supposons donc (5.115) démontré. Les boules $B(z, r(z))$ pour $z \in [\alpha, s_0 - \alpha] \times \overline{\Omega}$ recouvrent trivialement le compact $[\alpha, s_0 - \alpha] \times \overline{\Omega}$. On peut donc extraire un sous recouvrement par un nombre fini de boules $B(z_j, r_j)$. Notons $C_j > 0, \delta_j \in \,]0,1[$ les constantes telles qu'on ait $\|u\|_{H^1(B(z_j,r_j)\cap Z)} \leq C_j\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_j}\Theta^{\delta_j}$, et posons $\delta = \min \delta_j \in \,]0,1[$. On a avec $\mu_j = \delta/\delta_j \in \,]0,1]$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(B(z_j,r_j)\cap Z)} &= \|u\|_{H^1(B(z_j,r_j)\cap Z)}^{\mu_j}\|u\|_{H^1(B(z_j,r_j)\cap Z)}^{1-\mu_j} \\
&\leq \|u\|_{H^1(B(z_j,r_j)\cap Z)}^{\mu_j}\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\mu_j} \\
&\leq (C_j\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_j}\Theta^{\delta_j})^{\mu_j}\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\mu_j} = C_j^{\mu_j}\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta}\Theta^\delta.
\end{aligned}$$

Il en résulte (5.113) avec $C = (\sum_j C_j^{2\mu_j})^{1/2}$ puisque on a $Y \subset \bigcup_j (B(z_j, r_j) \cap Z)$.

Pour prouver la propriété (5.115), nous allons procéder en trois étapes :

(i) Preuve dans le cas $z = (s, x)$ avec $s > 0$ petit et $x \in \omega$ en utilisant l'inégalité (3.57) du théorème 3.5.

(ii) Preuve dans le cas $z = (s, x) \in \,]0, s_0[\times\Omega$ en utilisant le théorème 3.1.

(iii) Preuve dans le cas $z = (s, x) \in \,]0, s_0[\times\partial\Omega$ en utilisant l'inégalité (3.58) du théorème 3.5.

Les fonctions poids φ que nous allons utiliser pour appliquer les inégalités de Carleman sont de la forme suivante.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $z_0 \in U$. On se donne une fonction ψ de classe C^∞ définie sur $U \setminus \{z_0\}$, à valeurs réelles, vérifiant

(5.116)
$$\begin{gathered}
\lim_{z\to z_0} \psi(z) = +\infty \quad \text{et} \quad \psi'(z) \neq 0 \;\; \forall z \in U \setminus \{z_0\}, \\
\exists c_0 > 0 \;\text{ tel que } \{z \in U, c_0 \leq \psi(z) \leq c'\} \quad \text{est compact } \forall\, c' \geq c_0.
\end{gathered}$$

Un exemple typique est la fonction $\psi(z) = |z - z_0|^{-1}$ avec $U = B(z_0, r)$. On choisit alors des nombres

$$c_0 < c_1 < c_1' < c_2 < c_2' < c_3 < c_3' < \infty$$

et on pose

(5.117)
$$\begin{gathered}
V = \{z \in U \setminus \{z_0\},\ c_1 < \psi(z) < c_3'\}, \quad V' = \{z \in U \setminus \{z_0\},\ c_1' < \psi(z) < c_3\} \\
V_j = \{z \in U \setminus \{z_0\},\ c_j < \psi(z) < c_j'\}.
\end{gathered}$$

L'adhérence $\overline{V}$ de V dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est un compact, contenu dans $U\setminus\{z_0\}$. D'après le lemme 3.2, il existe donc une constante $D>0$ telle que $\varphi=e^{D\psi}$ vérifie l'hypothèse de sous ellipticité de Hörmander sur $\overline{V}$ pour le laplacien $-\partial_s^2-\triangle$. On posera $\rho_j=e^{Dc_j}$ et $\rho'_j=e^{Dc'_j}$. On notera $\chi\in C_0^\infty(V)$ une fonction vérifiant $\chi(z)=1$ pour tout z au voisinage de $\overline{V'}$. Le commutateur $[\chi,A]$ est alors à support dans $V_1\cup V_3$.

(i) *Le cas $z=(s,x_0)$ avec $s>0$ petit et $x_0\in\omega$.* — Dans ce cas on pose $z_0=(-1,x_0)$ et on choisit la fonction $\psi(z)=|z-z_0|^{-1}$ avec $U=\mathbb{R}^{n+1}$. On a $\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,x)\neq 0$ pour $s>-1$. On choisit $c_0<1$ tel qu'on ait

$$\{x\in\mathbb{R}^n,\ 1+|x-x_0|^2\leq c_0^{-2}\}\subset\omega. \tag{5.118}$$

On choisit $c'_3>c_3>1$ de sorte que $\overline{V}_3\subset\{s<0\}$, $c'_2=1$ et enfin c_1,c'_1,c_2 tels qu'on ait $c_0<c_1<c'_1<c_2<c'_2=1$.

On peut alors appliquer l'inégalité (3.57) du théorème 3.5 (pour le demi-espace $s>0$) à la fonction $\chi u\in H^2(Z)$ qui vérifie $\chi u(0,x)=0$ et $\partial_s(\chi u)(0,x)=\chi(0,x)\partial_s u(0,x)$. On obtient donc qu'il existe $C,h_1>0$ tels que pour $h\in\,]0,h_1]$ on ait

$$\begin{aligned}&h\|e^{\varphi/h}\chi u\|^2_{L^2}+h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_{s,x}(\chi u)\|^2_{L^2}\\&\qquad\leq C\Big(h^4\|e^{\varphi/h}A(\chi u)\|^2_{L^2}+h^3\int e^{2\varphi(0,x)/h}|\chi\partial_s u|^2(0,x')dx'\Big).\end{aligned}\tag{5.119}$$

On a $A(\chi u)=\chi A(u)+[A,\chi]u$. L'opérateur$[A,\chi]$ est différentiel d'ordre 1, $[A,\chi]u$ est à support dans $V_1\cup V_3$ avec $\overline{V}_3\subset\{s<0\}$, et on a $\varphi\leq\rho'_1$ sur $\overline{V_1}$. On a $\chi=1$ sur $V_2\subset V'$ et $\varphi\geq\rho_2$ sur $\overline{V_2}$. On déduit donc de (5.118) et (5.119) qu'il existe C' tel que pour $h\in\,]0,h_1]$ on ait

$$e^{\rho_2/h}\|u\|_{H^1(V_2\cap Z)}\leq C'\Big(e^{\rho'_1/h}\|u\|_{H^1(Z)}+e^{\rho'_3/h}(\|A(u)\|_{L^2(Z)}+\|\partial_s u\|_{L^2(\omega)})\Big).\tag{5.120}$$

Comme on a $\rho'_1<\rho_2<\rho'_3$, avec $\alpha=\rho_2-\rho'_1>0$ et $\beta=\rho'_3-\rho_2>0$, on obtient par définition de Θ

$$\|u\|_{H^1(V_2\cap Z)}\leq C'(e^{-\alpha/h}\|u\|_{H^1(Z)}+e^{\beta/h}\Theta),\quad\forall h\in\,]0,h_1].\tag{5.121}$$

Si $e^{\frac{\alpha+\beta}{h_1}}\leq\frac{\|u\|_{H^1(Z)}}{\Theta}$, on applique l'inégalité (5.121) pour la valeur de h telle que $e^{\frac{\alpha+\beta}{h}}=\frac{\|u\|_{H^1(Z)}}{\Theta}$ et on obtient avec $\delta=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\in\,]0,1[$

$$\|u\|_{H^1(V_2\cap Z)}\leq 2C'\|u\|^{1-\delta}_{H^1(Z)}\Theta^\delta.\tag{5.122}$$

Enfin, si $e^{\frac{\alpha+\beta}{h_1}}\geq\frac{\|u\|_{H^1(Z)}}{\Theta}$, on applique l'inégalité (5.121) pour la valeur $h=h_1$ et on trouve à nouveau avec $\delta=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\in\,]0,1[$

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(V_2\cap Z)}&=\|u\|^{1-\delta}_{H^1(V_2\cap Z)}\|u\|^{\delta}_{H^1(V_2\cap Z)}\\&\leq\|u\|^{1-\delta}_{H^1(Z)}C'^\delta\Big(e^{-\alpha/h_1}\|u\|_{H^1(Z)}+e^{\beta/h_1}\Theta\Big)^\delta\\&\leq C'^\delta\|u\|^{1-\delta}_{H^1(Z)}\Big(2e^{\beta/h_1}\Theta\Big)^\delta=(2C'e^{\beta/h_1})^\delta\|u\|^{1-\delta}_{H^1(Z)}\Theta^\delta.\end{aligned}\tag{5.123}$$

Comme on a $c_2 < c'_2 = 1$, $V_2 \cap Z$ contient des points de la forme (s, x_0) avec $s > 0$ petit, ceci achève la preuve de (5.115) dans le premier cas.

(ii) *Le cas* $z_2 = (s_2, x_2) \in]0, s_0[\times\Omega$. — D'après le point i), il existe un $z_1 = (s_1, x_1)$ avec $s_1 > 0$ petit et $x_1 \in \omega$ tel que z_1 vérifie (5.115). Comme par hypothèse Ω est connexe, $Z =]0, s_0[\times\Omega$ est connexe, et il existe donc un chemin γ de classe C^∞ contenu dans Z, $u \in [0,1] \mapsto \gamma(u) = z_{1+u}$ qui relie z_1 à z_2. Comme $\gamma([0,1])$ est compact dans Z, il existe un ouvert W tel que $\gamma([0,1]) \subset W \subset Z$ et un difféomorphisme Φ de classe C^∞ de W sur $\mathbb{R}^{n+1} = \{(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\}$ tel que $\Phi(z_{1+u}) = (u, 0)$ pour tout $u \in [0,1]$. Posons $a = -1 + \sqrt{2} \in]0,1[$. On a $\frac{a}{1-a^2} = \frac{1}{2}$. Soit F la fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$ définie par

$$F(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2} - au. \tag{5.124}$$

On $F > 0$ et $\nabla F \neq 0$ sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$. Pour $d > 0$, les courbes de niveau $F(u,v) = d$ sont les ellipsoides d'équation

$$2a(u - \frac{d}{2})^2 + v^2 = d^2(1 + \frac{a}{2}).$$

En particulier, l'ouvert $\{F(u,v) < 1\} \cup \{(0,0)\}$ contient le segment $(u \in [0,1], v = 0)$. On définit alors la fonction ψ de classe C^∞ sur $W \setminus \{z_1\}$ par

$$\psi(z) = \frac{1}{F(\Phi(z))}. \tag{5.125}$$

Cette fonction ψ vérifie (5.116) (avec $z_0 = z_1$ et n'importe quel $c_0 > 0$). On note r_1, C_1, δ_1 des constantes telles qu'on ait (5.115) pour le point z_1. On choisit alors $c_2 = 1$, c'_2 assez grand pour qu'on ait $z_2 \in V_2$ et $c_3 > c'_2$ assez grand pour qu'on ait $\overline{V}_3 \subset B(z_1, r_1) \cap Z$. On peut alors appliquer le théorème 3.1 à la fonction χu. On obtient donc qu'il existe $C, h_1 > 0$ tels que pour $h \in]0, h_1]$ on ait

$$h\|e^{\varphi/h}(\chi u)\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_z(\chi u)\|_{L^2}^2 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}A(\chi u)\|_{L^2}^2,\ \forall u \in H^2(Z),\ \forall h \in]0, h_1]. \tag{5.126}$$

On utilise à nouveau $A(\chi u) = \chi A(u) + [A, \chi]u$. On a $[A, \chi]u$ à support dans $V_1 \cup V_3$. En utilisant $\varphi \leq \rho'_j$ sur $\overline{V_j}$, $\chi = 1$ sur $V_2 \subset V'$ et $\varphi \geq \rho_2$ sur $\overline{V_2}$, on déduit donc de (5.126) qu'il existe C' tel que pour $h \in]0, h_1]$ on ait

$$e^{\rho_2/h}\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C'\Big(e^{\rho'_1/h}\|u\|_{H^1(V_1)} + e^{\rho'_3/h}(\|A(u)\|_{L^2(Z)} + \|u\|_{H^1(V_3)})\Big). \tag{5.127}$$

D'après (5.115) et le choix de c_3, on a $\|u\|_{H^1(V_3)} \leq C_1\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_1}\Theta^{\delta_1}$, donc (5.127) implique

$$e^{\rho_2/h}\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C'\Big(e^{\rho'_1/h}\|u\|_{H^1(Z)} + e^{\rho'_3/h}(\Theta + C_1\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_1}\Theta^{\delta_1})\Big). \tag{5.128}$$

Posons $\Gamma = \Theta + C_1\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_1}\Theta^{\delta_1}$. Comme on a $\rho'_1 < \rho_2 < \rho'_3$, on obtient comme dans la preuve du cas i), qu'il existe C_2 et $\delta \in]0,1[$ tels que

$$\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C_2\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta}\Gamma^\delta. \tag{5.129}$$

Si $\|u\|_{H^1(Z)} \leq \Theta$, on a $\Gamma \leq (1+C_1)\Theta$, donc (5.129) implique

$$\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C_2(1+C_1)^\delta \|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta}\Theta^\delta \tag{5.130}$$

et comme on a $\|u\|_{H^1(V_2)} \leq \|u\|_{H^1(V_2)}^{\delta_1}\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_1}$, (5.130) implique

$$\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C_2^{\delta_1}(1+C_1)^{\delta\delta_1}\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta\delta_1}\Theta^{\delta\delta_1}. \tag{5.131}$$

Si $\|u\|_{H^1(Z)} \geq \Theta$, on a $\Gamma \leq (1+C_1)\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_1}\Theta^{\delta_1}$ donc (5.129) implique

$$\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C_2(1+C_1)^\delta \|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta\delta_1}\Theta^{\delta\delta_1}. \tag{5.132}$$

Comme V_2 contient un voisinage de z_2, (5.115) est conséquence de (5.131) et (5.132), ce qui achève la preuve dans le deuxième cas.

(iii) *Le cas* $z_1 = (s_1, x_1) \in \,]0, s_0[\times\partial\Omega$. — Pour $a > 0$, on pose

$$F_a = \{x \in \overline{\Omega},\quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq a\}. \tag{5.133}$$

Pour $a > 0$ petit, l'application $x(\in F_a) \mapsto (y, r)$ avec $r = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ et où $y \in \partial\Omega$ vérifie $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = |x - y|$ est bien définie, et est un C^∞ difféomorphisme de F_a sur $\partial\Omega \times [0, a]$. En particulier, la fonction r est C^∞ sur F_a.

On fixe $a > 0$ petit. Soit $z_0 = (s_1, x_0)$ avec $x_0 \in \Omega$, $a = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) = |x_0 - x_1|$. On pose à nouveau $\psi(z) = |z - z_0|^{-1}$. On choisit $c_2 = \frac{1}{2a}, c_2' = \frac{2}{a}$ de sorte que V_2 contient un voisinage de z_1. Enfin on choisit $c_1 = 1/4a, c_1' = 1/3a$ et $c_3' > c_3$ tels qu'on ait $\overline{V}_3 \subset \{r > a/2\}$. Comme précedemment, on pose $\varphi = e^{D\psi}$. On choisit à nouveau $\chi(z) \in C_0^\infty(V)$ vérifiant $\chi(z) = 1$ au voisinage de $\overline{V'}$. Soit de plus $\theta(r) \in C_0^\infty([0, a/2[)$ vérifiant $\theta(r) = 1$ pour $r \in [0, a/4]$. On peut alors appliquer le théorème 3.5 à la fonction $\theta(r)\chi(z)u$, et comme on a $\frac{\partial\psi}{\partial r}(s, x) > 0$ pour tout $(s, x) \in \overline{V} \cap F_{a/2}$, l'inégalité (3.58) donne

$$h\|e^{\varphi/h}(\theta\chi u)\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_z(\theta\chi u)\|_{L^2}^2 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}A(\theta\chi u)\|_{L^2}^2,\ \forall h \in \,]0, h_1]. \tag{5.134}$$

On a $A(\theta\chi u) = \theta\chi A(u) + \theta[A, \chi]u + [A, \theta]\chi u$, et $\theta[A, \chi]u + [A, \theta]\chi u$ est à support dans $V_1 \cup (\{a/4 \leq r \leq a/2\} \cap V)$. En utilisant $\varphi \leq \rho_j'$ sur $\overline{V_j}$, $\theta\chi = 1$ sur $V_2 \cap F_{a/4}$ et $\varphi \geq \rho_2$ sur $\overline{V_2}$, on déduit donc de (5.134) qu'il existe C' tel que pour $h \in \,]0, h_1]$ on ait

$$e^{\rho_2/h}\|u\|_{H^1(V_2\cap F_{a/4})} \leq C'\Big(e^{\rho_1'/h}\|u\|_{H^1(V_1)} + e^{\rho_3'/h}(\|A(u)\|_{L^2(Z)} + \|u\|_{H^1(\{a/4\leq r\leq a/2\}\cap V)})\Big). \tag{5.135}$$

D'après l'étude du deuxième cas, il existe C_1 et $\delta_1 \in \,]0, 1[$ tels qu'on ait

$$\|u\|_{H^1(\{a/4\leq r\leq a/2\}\cap V))} \leq C_1\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_1}\Theta^{\delta_1}$$

donc (5.135) implique

$$e^{\rho_2/h}\|u\|_{H^1(V_2\cap F_{a/4})} \leq C'\Big(e^{\rho_1'/h}\|u\|_{H^1(Z)} + e^{\rho_3'/h}(\Theta + C_1\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta_1}\Theta^{\delta_1})\Big). \tag{5.136}$$

Comme $V_2 \cap F_{a/4}$ contient un voisinage de z_1 dans $\overline{Z}$, on conclut comme dans le deuxième cas que (5.115) est vrai au point z_1.

La preuve du théorème 5.1 est complète. □

5.2. Inégalités spectrales. — On note $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$ le spectre de $-\triangle$ avec condition de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$, et $\Phi_j \in L^2(\Omega)$ une base orthonormale de fonctions propres associées

$$-\triangle\Phi_j = \mu_j\Phi_j, \quad \Phi_j|_{\partial\Omega} = 0.$$

Les résultats de cette section s'appliquent aussi au cas ou $-\triangle$ est un opérateur elliptique P d'ordre deux de la forme (3.28), sous l'hypothèse supplémentaire que P est auto-adjoint sur L^2, pour assurer l'existence des μ_j, Φ_j. Nous allons déduire du théorème 5.1 le résultat suivant.

Théorème 5.2. — *Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide. Il existe des constantes $B > 0, K > 0$ telles que pour toute suite de nombres complexes z_j et tout réel $\mu \geq 1$ on ait*

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2 = \int_\Omega |\sum_{\mu_j \leq \mu} z_j\Phi_j(x)|^2 dx \leq Be^{K\sqrt{\mu}} \int_\omega |\sum_{\mu_j \leq \mu} z_j\Phi_j(x)|^2 dx. \tag{5.137}$$

Démonstration. — Notons $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ et posons

$$u(s,x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} z_j \frac{\sinh(s\sqrt{\mu}_j)}{\sqrt{\mu}_j}\Phi_j(x).$$

On a

$$(\partial_s^2 + \triangle)u = 0, \quad u(s,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u(0,x) = 0.$$

La norme $\|u\|_{H^1(Y)}$ est minorée par

$$\|u\|^2_{H^1(Y)} \geq \|u\|^2_{L^2(Y)} = \sum_{\mu_j \leq \mu} \int_\alpha^{s_0-\alpha} |z_j|^2 \frac{\sinh^2(s\sqrt{\mu}_j)}{\mu_j} ds \geq \sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2 \int_\alpha^{s_0-\alpha} s^2 ds. \tag{5.138}$$

On a $\int_\Omega |\nabla\Phi_j|^2 dx = \mu_j$, et donc la norme $\|u\|_{H^1(Z)}$ est majorée par $(c_0 = s_0(2 + \frac{1}{\mu_1}))$,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(Z)} &= \int_0^{s_0} (\int_\Omega |\nabla_{s,x} u|^2 + |u|^2 dx) ds \\ &\leq \sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2 \int_0^{s_0} (2 + \frac{1}{\mu_j}) e^{2s\sqrt{\mu}_j} ds \leq c_0 \sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2 \; e^{2s_0\sqrt{\mu}}. \end{aligned} \tag{5.139}$$

On a $\|\partial_s u(0,x)\|^2_{L^2(\omega)} = \int_\omega |\sum_{\mu_j \leq \mu} z_j\Phi_j(x)|^2 dx$; on déduit donc de (5.138), (5.139) et du théorème 5.1 qu'il existe C et $\delta \in]0,1[$ tels que pour toute suite z_j et tout $\mu \geq 1$ on ait

$$\alpha^2(s_0 - 2\alpha)(\sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2) \leq C^2(c_0 \sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2 \; e^{2s_0\sqrt{\mu}})^{1-\delta}(\int_\omega |\sum_{\mu_j \leq \mu} z_j\Phi_j(x)|^2 dx)^\delta. \tag{5.140}$$

Il en résulte l'inégalité (5.137) avec $K = \frac{2s_0(1-\delta)}{\delta}$. La preuve du théorème 5.2 est complète. $\square$

Un autre corollaire intéressant du théorème 5.1 est le résultat suivant qui dit que les fonctions de la forme $\sum_j z_j \Phi_j(x)$, avec $|z_j| \leq Ce^{-\epsilon\sqrt{\mu_j}}$ vérifient le principe du prolongement analytique. Ceci est bien sûr naturel dans le cas où $-\triangle$ est le laplacien usuel, mais a priori beaucoup moins évident pour un opérateur elliptique auto-adjoint général P à coefficients C^∞ de la forme (3.28).

Théorème 5.3. — *Soit $\epsilon > 0$ et z_j une suite de nombres complexes telle que la suite $z_j e^{\epsilon\sqrt{\mu_j}}$ soit bornée. Soit $f(x) = \sum_j z_j \Phi_j(x)$. Alors si f s'annule sur un ouvert non vide ω de Ω, f est identiquement nulle.*

Démonstration. — Posons

$$u(s, x) = \sum_j z_j \frac{\sinh(s\sqrt{\mu}_j)}{\sqrt{\mu}_j} \Phi_j(x).$$

L'hypothèse que la suite $z_j e^{\epsilon\sqrt{\mu_j}}$ est bornée assure que la série de définition de u est convergente pour $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ et définit bien une fonction de $H^1(Z)$ pour $s_0 \leq \epsilon/2$. Or on a trivialement $Au = 0$ et par hypothèse $\partial_s u(0, x)|_\omega = 0$. D'après l'inégalité (5.113) du théorème 5.1, on a donc $\|u\|_{H^1(Y)} = 0$. Or on a comme précédemment
(5.141)

$$\|u\|^2_{H^1(Y)} \geq \|u\|^2_{L^2(Y)} = \sum_j \int_\alpha^{s_0-\alpha} |z_j|^2 \frac{\sinh^2(s\sqrt{\mu}_j)}{\mu_j} ds \geq \sum_j |z_j|^2 \int_\alpha^{s_0-\alpha} s^2 ds$$

donc tous les z_j sont nuls, ce qui prouve le théorème. □

La proposition suivante assure que l'estimation spectrale (5.137) du théorème 5.2 ne peut pas être améliorée, même si ω est 'gros'.

Proposition 5.1. — *On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega \setminus \overline{\omega}$. Alors il existe $C > 0$, et pour tout $\mu \geq 1$ une suite $z_j = z_j(\mu)$ tels que*

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2 \geq Ce^{C\sqrt{\mu}} \int_\omega |\sum_{\mu_j \leq \mu} z_j \Phi_j(x)|^2 dx. \tag{5.142}$$

Démonstration. — Pour $t > 0, x, y \in \Omega$, soit $P_t(x, y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-t\mu_j} \Phi_j(x)\Phi_j(y)$, le noyau de la chaleur pour le laplacien avec condition de Dirichlet dans Ω. Le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$ est égal à $(4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$. Par le principe du maximum, pour tout $x, y \in \Omega$, on a donc l'encadrement

$$0 < P_t(x, y) \leq (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

Choisissons $y_0 \in \Omega$ tel que $d = \text{dist}(y_0, \omega) > 0$. On a donc pour $t \in]0, 1]$, $P_t(x, y_0) \leq e^{-C_0/t}$, avec $C_0 > 0$, indépendant de x in ω. On a pour tout $x, y \in \Omega$

$$|\sum_{\mu_j \leq \mu} e^{-t\mu_j} \Phi_j(x)\Phi_j(y)| \leq |P_t(x, y)| + |\sum_{\mu_j > \mu} e^{-t\mu_j} \Phi_j(x)\Phi_j(y)|. \tag{5.143}$$

Pour $k > n/4$, on a d'après les inégalités de Sobolev

$$\|\Phi_j\|_{L^\infty} \leq C\|\Phi_j\|_{H^{2k}} \leq C'\|\Delta^k\Phi_j\|_{L^2} = C'\mu_j^k. \tag{5.144}$$

D'après (5.144) on obtient donc

$$|\sum_{\mu_j\leq\mu} e^{-t\mu_j}\Phi_j(x)\Phi_j(y_0)| \leq e^{-C_0/t} + C\sum_{\mu_j>\mu} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k}, \quad \forall x\in\omega,\ \forall t\in\,]0,1]. \tag{5.145}$$

Posons $z_j = e^{-t\mu_j}\Phi_j(y_0)$ et $t = 1/\sqrt{\mu}$ avec $\mu \geq 1$. On obtient

$$|\sum_{\mu_j\leq\mu} z_j\Phi_j(x)| \leq e^{-C_0\sqrt{\mu}} + C\sum_{\mu_j>\mu} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k}, \quad \forall x\in\omega. \tag{5.146}$$

Pour estimer le second terme, on introduit $J_\mu = \{l;\ \mu_l \leq \mu\}$. D'après les asymptotiques de Weyl (voir [**4**]), on a $\#\, J_\mu \leq C\mu^{n/2}$. Pour $\mu > 1$ grand, on obtient donc, en utilisant le fait que pour $t = 1/\sqrt{\mu}$, la fonction $e^{-tx}x^{2k+n/2}$ décroit sur $[\mu, +\infty)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu_j>\mu} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k} &= \sum_{N\in\mathbb{N}}\ \sum_{N<\mu_j-\mu\leq N+1} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k} \\
&\leq \sum_{N\in\mathbb{N}}\ \sum_{N<\mu_j-\mu\leq N+1} e^{-t(\mu+N)}(\mu+N+1)^{2k} \\
&\leq C\sum_{N\in\mathbb{N}} e^{-t(\mu+N)}(\mu+N+1)^{2k+n/2} \\
&\leq C\int_{\mu-1}^{\infty} e^{-tx}(x+1)^{2k+n/2}\,dx = Ce^t\int_{\mu}^{\infty} e^{-tx}x^{2k+n/2}\,dx.
\end{aligned} \tag{5.147}$$

Posons $l = 2k + n/2$. En utilisant le changement de variable $y = t(x-\mu)$ on obtient en utilisant $t = 1/\sqrt{\mu}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mu}^{\infty} e^{-tx}x^l\,dx &= t^{-1-l}e^{-t\mu}\int_0^\infty e^{-y}(\mu t + y)^l\,dy \\
&= \mu^{\frac{l+1}{2}}e^{-\sqrt{\mu}}\int_0^\infty e^{-y}(\sqrt{\mu}+y)^l\,dy \\
&\leq \mu^{l+\frac12}e^{-\sqrt{\mu}}\int_0^\infty e^{-y}(1+y)^l\,dy = C_l\mu^{l+\frac12}e^{-\sqrt{\mu}}.
\end{aligned} \tag{5.148}$$

Pour $\mu > 1$ grand, on a donc obtenu pour $x\in\omega$ $|\sum_{\mu_j\leq\mu} z_j\Phi_j(x)| \leq Ce^{-C\sqrt{\mu}}$, d'où

$$\int_\omega |\sum_{\mu_j\leq\mu} z_j\Phi_j(x)|^2 dx \leq C|\omega|e^{-C\sqrt{\mu}}. \tag{5.149}$$

Par ailleurs, par le choix des coefficients z_j, on a

$$\sum_{\mu_j\leq\mu}|z_j|^2 = \sum_{\mu_j\leq\mu} e^{-2t\mu_j}|\Phi_j(y_0)|^2 = P_{2t}(y_0,y_0) - \sum_{\mu_j>\mu} e^{-2t\mu_j}|\Phi_j(y_0)|^2. \tag{5.150}$$

Les estimées classiques du noyau de la chaleur sur la diagonale impliquent, avec $t = 1/\sqrt{\mu}$, $P_{2t}(y_0,y_0) \geq C(2t)^{-n/2} = C'\mu^{n/4}$. On a aussi

$$\sum_{\mu_j>\mu} e^{-2t\mu_j}|\phi_j(y_0)|^2 \leq C\sum_{\mu_j>\mu} e^{-2t\mu_j}\mu_j^{2k} \leq C'e^{-C'\sqrt{\mu}}$$

d'après les inégalités de Sobolev. On a donc prouvé

$$\sum_{\mu_j \leq \mu} |z_j|^2 \geq C\mu^{n/4}. \tag{5.151}$$

La proposition 5.1 résulte donc des estimations (5.149) et (5.151).

6. Contrôle à zéro pour l'équation de la chaleur

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On s'intéresse ici au contrôle de l'équation de la chaleur sur Ω, avec un contrôle agissant sur un sous ouvert ω non vide de Ω pendant un temps $T > 0$ donné. Le problème s'énonce de la manière suivante :

Soit $y_0(x) \in L^2(\Omega)$ une donnée initiale au temps $t = 0$. Existe t-il une fonction $v(t, x) \in L^2(]0, T[\times\omega)$ (v est le contrôle) telle que la solution du problème d'évolution parabolique

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 1_\omega v & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.152}$$

vérifie $v(T, .) = 0$. La réponse, affirmative, à cette question est donnée par le théorème suivant.

Théorème 6.1. — *Soit ω un ouvert non vide de Ω. Pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T = C_{T,\omega} > 0$ telle que pour toute donnée $y_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in L^2(]0, T[\times\omega)$, vérifiant*

$$\|v\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} \leq C_T \|y_0\|_{L^2(\Omega)},$$

tel que la solution du système (6.152) *vérifie $y(T) = 0$.*

Pour la démonstration de ce résultat, nous allons utiliser le théorème spectral 5.2. On procèdera en deux étapes : on prouve d'abord un résultat de contrôlabilité partiel des modes "basse fréquence", et on construit ensuite la fonction de contrôle v par une suite de contrôles actifs et passifs, en utilisant la propriété de décroissance naturelle de l'énergie des modes "haute-fréquence" de l'équation de la chaleur. On garde les notations de la section 5.

6.1. Observabilité et contrôle partiel. — Pour $j \in \mathbb{N}$, on note E_j le sous espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les fonctions propres Φ_k avec $\mu_k \le 2^{2j}$. On note Π_{E_j} le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)$ sur E_j. Le problème de contrôlabilité "basse fréquence" s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = \Pi_{E_j}(1_\omega v) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y(0) = y_0 \in E_j & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.153}$$

La solution $y(t,x)$ de (6.153) vérifie $y(t,.) \in E_j$ pour tout $t \in [0,T]$. Le lemme suivant assure l'existence d'au moins un contrôle v tel qu'on ait $y(T,.) = 0$ et donne une estimation de la norme du contrôle optimal en fonction de $j \in \mathbb{N}$. Cette estimation est bien sûr loin d'être optimale, mais s'avérera suffisante pour prouver le théorème 6.1.

Lemme 6.1. — *Soit ω un ouvert non vide de Ω. Il existe une constante $C = C_\omega > 0$ telle que pour tout $T > 0$, tout $j \in \mathbb{N}$ et tout y_0 dans E_j, il existe un $v \in L^2(]0,T[\times\omega)$ vérifiant*

$$\|v\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} \le CT^{-\frac{1}{2}} e^{C2^j} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}$$

et tel que la solution y de (6.153) *vérifie $y(T,0) = 0$.*

Démonstration. — Le système adjoint de (6.153) est

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ q = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ q(T) = q_f \in E_j. \end{cases} \tag{6.154}$$

Si on pose $q_f = \sum_{\mu_k \le 2^{2j}} q_{f,k}\Phi_k$, on a $q(t) = \sum_{\mu_k \le 2^{2j}} q_{f,k} e^{\mu_k(t-T)}\Phi_k \in E_j$, de sorte que la fonction $t \to \|q(t)\|_{L^2(\Omega)}$ est croissante, d'où en utilisant le théorème 5.2

(6.155)
$$\begin{aligned} T\|q(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \int_0^T \|q(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt = \int_0^T \int_\Omega |\sum_{\mu_k \le 2^{2j}} q_{f,k} e^{\mu_k(t-T)}\Phi_k(x)|^2\, dt\, dx \\ &\le \int_0^T Be^{K2^j} \int_\omega |\sum_{\mu_k \le 2^{2j}} q_{f,k} e^{\mu_k(t-T)}\Phi_k(x)|^2\, dt\, dx \\ &= Be^{K2^j} \int_0^T \int_\omega |q(t,x)|^2\, dt\, dx. \end{aligned}$$

On va à présent déduire de (6.155) par un argument classique de dualité l'existence du contrôle v ansi que l'estimation de sa norme.

Pour tout $f \in E_j$ et tout $v \in L^2(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \Pi_{E_j}(1_\omega v) f\, dx = \int_\Omega 1_\omega v\, \Pi_{E_j}(f)\, dx = \int_\omega vf\, dx.$$

Pour tout (y, v, y_0) vérifiant (6.153) et tout (q, q_f) vérifiant (6.154) on a donc

$$\int_0^T \int_\omega vq\ dxdt = \int_0^T \int_\Omega (\partial_t y - \Delta y) q\ dxdt = \int_\Omega y(T,x) q_f(x)\ dx -$$

$$\int_\Omega y_0(x) q(0,x)\ dx. \tag{6.156}$$

Notons Q_j l'espace des solutions q de l'équation (6.154) ; l'espace Q_j est isomorphe à E_j. Munissons Q_j des normes

$$\|q\|_1 = \|q(0)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|q\|_2 = (\int_0^T \int_\omega |q(t,x)|^2\ dt\ dx)^{1/2}. \tag{6.157}$$

D'après (6.155), avec $A_j = T^{-1/2} B^{1/2} e^{\frac{K}{2} 2^j}$, on a $\|q\|_1 \leq A_j \|q\|_2$ (ce qui prouve en particulier que $\|.\|_2$ est bien une norme !). La forme linéaire sur l'espace Q_j définie par $l(q) = -\int_\Omega y_0(x) q(0,x)\ dx$ vérifie donc

$$|l(q)| \leq A_j \|y_0\|_{L^2(\Omega)} \|q\|_2. \tag{6.158}$$

L'application u de $(Q_j, \|.\|_2)$ dans l'espace de Hilbert $F = L^2(]0,T[\times\omega)$ définie par $u(q) = 1_\omega q$ est une injection isométrique puisqu'elle vérifie par construction $\|u(q)\|_F = \|q\|_2$. Si l est une forme linéaire sur Q_j vérifiant $|l(q)| \leq C\|q\|_2$, il existe donc d'après le théorème de Riesz, un vecteur $v \in F$ vérifiant $\|v\|_F \leq C$ et $l(q) = (u(q)|v)_F$. Or ceci signifie exactement

$$\begin{aligned} &\exists v \in L^2(]0,T[\times\omega), \quad \|v\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} \leq A_j \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\forall q \in Q_j, \quad \int_0^T \int_\omega vq\ dxdt = -\int_\Omega y_0(x) q(0,x)\ dx. \end{aligned} \tag{6.159}$$

D'après (6.156), avec ce choix de contrôle v, on a alors $\int_\Omega y(T,x) q_f(x)\ dx = 0$ pour tout $q_f \in E_j$, donc $\Pi_{E_j}(y(T,x)) = 0$, donc $y(T,.) = 0$. La preuve du lemme 6.1 est complète. □

Pour $a \geq 0$, lorsqu'on travaille sur l'intervalle de temps $[a, a+T]$, on notera $V_j(y_0, a, T)$ un contrôle qui vérifie l'estimation du lemme (6.1).

6.2. Preuve du théorème 6.1. — Dans ce paragraphe, on prouve le théorème 6.1 et on en déduit dans le corollaire 6.2 une inégalité d'observabilité pour le système (6.152).

On découpe l'intervalle $[0,T]$ sous la forme $[0,T] = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} [a_j, a_{j+1}]$, avec $a_0 = 0$, $a_{j+1} = a_j + 2T_j$, pour $j \in \mathbb{N}$. On choisit T_j de la forme $T_j = c2^{-j\rho}$ avec $\rho \in (0,1)$ et la constante c telle que $2\sum_{j=0}^{\infty} T_j = T$. On définit alors la fonction de contrôle v par la stratégie suivante :

$$\text{si } t \in (a_j, a_j + T_j], \quad v(t,x) = V_j(\Pi_{E_j} y(a_j,.), a_j, T_j)$$
$$\text{et } y(t,.) = S(t-a_j)y(a_j,.) + \int_{a_j}^{t} S(t-s)1_\omega v(s,.)ds,$$

$$\text{si } t \in (a_j + T_j, a_{j+1}], \quad v(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad y(t,.) = S(t - a_j - T_j)y(a_j + T_j,.),$$

où on a noté pour $t \geq 0$ $S(t) = e^{t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur . On a $\|S(t)\|_{(L^2,L^2)} \leq 1$, d'où

$$\left\| \int_{a_j}^{a_j+T_j} S(t-s)1_\omega v(s,.)ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_{a_j}^{a_j+T_j} \|1_\omega v(s)\|_{L^2(\Omega)}\, ds \leq T_j^{1/2} \|v\|_{L^2(]a_j,a_j+T_j[\times\omega)}.$$

Par le choix de v dans l'intervalle de temps $[a_j, a_j + T_j]$, on a donc d'après le lemme 6.1

$$\|y(a_j + T_j,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + Ce^{C2^j})\|y(a_j,.)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{et} \quad \Pi_{E_j} y(a_j + T_j,.) = 0.$$

Sur les intervalles $t \in [a_j + T_j, a_{j+1}]$, $y(t,.)$ vérifie l'équation de la chaleur avec second membre nul, et sa donnée initiale en $t = a_j + T_j$ vérifie $\Pi_{E_j} y(a_j + T_j,.) = 0$, d'où il résulte

$$\|y(a_{j+1},.)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-2^{2j}T_j} \|y(a_j + T_j,.)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à augmenter la constante C, on a donc

$$\|y(a_{j+1},.)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{C2^j - 2^{2j}T_j} \|y(a_j,.)\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui implique

$$\|y(a_{j+1},.)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{\sum_{k=0}^{j} C2^k - 2^{2k}T_k} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

On a $2^{2k}T_k = c2^{k(2-\rho)}$, et $2 - \rho > 1$ d'où

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} (C2^k - c2^{k(2-\rho)}) = -\infty.$$

Il en résulte qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle qu'on ait

$$\|y(a_{j+1},.)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 e^{-C_0 2^{j(2-\rho)}} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{6.160}$$

On en déduit $\lim_{j\to\infty} \|y(a_j,.)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, i.e $y(T,.) = 0$ puisque $y(t,.)$ est continue à valeurs dans $L^2(\Omega)$. En effet, le membre de droite de (6.152) appartient à $L^2(]0,T[\times\Omega)$, ce que nous allons à présent vérifier.

On a $\|1_\omega v\|^2_{L^2(]0,T[\times\Omega)} = \sum_{j\geq 0} \|v\|^2_{L^2((a_j,a_j+T_j)\times\omega)}$. D'après le lemme 6.1 et (6.160), on en déduit

$$\|1_\omega v\|^2_{L^2(]0,T[\times\Omega)} \leq \Big(C^2 T_0^{-1} e^{2C} + \sum_{j\geq 1} C^2 T_j^{-1} e^{2C2^j} C_0^2 e^{-2C_0 2^{(j-1)(2-\rho)}}\Big) \|y_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On a $2-\rho>1$ et $T_j = c2^{-j\rho}$, d'où comme précédemment $\|1_\omega v\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} \leq C_T\|y_0\|_{L^2(\Omega)}$ avec $C_T<\infty$. La preuve du théorème 6.1 est complète. □

***Corollaire 6.2* (Observabilité)**. — *Pour tout $q_T \in L^2(\Omega)$, la solution $q(t,x) \in C^0([0,T],L^2(\Omega))$ de l'équation parabolique rétrograde en temps*

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q = 0 & \textit{dans }]0,T[\times\Omega, \\ q = 0 & \textit{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ q(T,x) = q_T & \textit{dans } \Omega \end{cases}$$

vérifie l'inégalité d'observabilité suivante

$$\|q|_{t=0}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_T^2 \int_0^T \int_\omega |q(t,x)|^2\, dt\, dx$$

où C_T est la constante définie dans le théorème 6.1.

Démonstration. — La preuve de ce corollaire s'obtient par dualité, comme dans la fin de la preuve du lemme 6.1. L'identité (6.156) reste vraie pour y solution de (6.152). En choisissant pour v le contrôle associé par le théorème 6.1 à un $y_0 \in L^2(\Omega)$ arbitraire de norme 1 , on obtient

$$\int_\Omega y_0(x)q(0,x)\, dx = -\int_0^T \int_\omega vq\, dxdt,$$

d'où $\|q(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(]0,T[\times\omega)}\|q\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} \leq C_T\|q\|_{L^2(]0,T[\times\omega)}$. □

6.3. Une autre preuve du théorème 6.1. — Une preuve alternative du théorème 6.1 consiste à prouver directement l'inégalité d'observabilité suivante.

***Théorème 6.2* (Observabilité)**. — *Il existe une constante $C>0$ telle que pour toute donnée $q_0 \in L^2(\Omega)$, la solution $q(t,x) \in C^0([0,T],L^2(\Omega))$ du système*

$$\begin{cases} \partial_t q - \Delta q = 0 & \textit{dans }]0,T[\times\Omega, \\ q = 0 & \textit{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ q(0) = q_0 & \textit{dans } \Omega \end{cases}$$

vérifie l'inégalité d'observabilité

$$\|q|_{t=T}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |q(t,x)|^2\, dt\, dx. \tag{6.161}$$

En effet, on a vu que la preuve du lemme 6.1 montre qu'il est équivalent de prouver le théorème 6.1 de contrôlabilité exacte à zéro ou l'inégalité d'observabilité sur l'équation rétrograde du corollaire 6.2, qui est elle même équivalente au théorème 6.2 en changeant t en $-t$. C'est cette stratégie qui a été utilisée par Fursikov et Imanuvilov dans [**3**], où ces auteurs construisent une fonction poids globale $\varphi(x)$ définie pour $x \in \overline{\Omega}$ telle que l'inégalité de Carleman parabolique

$$\begin{aligned}\|h^{1/2}e^{\varphi/h}u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2}e^{\varphi/h}\nabla_x u\|^2_{L^2(Q)}\\ \leq C\Big(\|h^2e^{\varphi/h}(\partial_t - \triangle)u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{1/2}e^{\varphi/h}u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}\Big)\end{aligned}$$

avec $h = \epsilon t(T-t)$, soit valable pour toute fonction $u \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ vérifiant la condition au bord $u|_{\partial\Omega} = 0$ et tout $\epsilon > 0$ petit. La construction de la fonction poids globale $\varphi(x)$ vérifiant les hypothèses géométriques adéquates utilise des arguments de théorie de Morse, certes élémentaires, mais que nous n'avons pas rappelés dans ce cours. Nous allons donc indiquer une preuve auto-contenue de l'inégalité (6.161). En fait les inégalités de Carleman paraboliques de la section 4 entraînent la proposition suivante.

Proposition 6.1. — *Il existe des constantes $C > 0, \epsilon_0 > 0$, et $A_2 < A_3 < 0$, telles que pour toute fonction $u \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ vérifiant la condition au bord $u|_{\partial\Omega} = 0$, on ait pour tout $\epsilon \in]0,\epsilon_0]$ avec $h = \epsilon t(T-t)$ et $P = \partial_t - \triangle$*

$$\|h^{1/2}e^{A_2/h}u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2}e^{A_2/h}\nabla_x u\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq C\Big(\|h^2e^{A_3/h}Pu\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{1/2}e^{A_3/h}u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}\Big). \tag{6.162}$$

Démonstration. — On fixe un point $x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, 2r_0) \subset \omega$. On pose $\omega_1 = B(x_0, r_0)$ et $\omega_2 = B(x_0, r_0/2)$. Pour tout $x \in \overline{\Omega}\setminus\omega_2$, soit $r_x > 0$ assez petit pour avoir $B(x, 2r_x) \subset \Omega$ si $x \in \Omega$, et $B(x, 2r_x) \subset \{(x', x_n), |x'| < r, |x_n| < r\}$ si $x \in \partial\Omega$, où (x', x_n) est un système de coordonnées géodésiques normales centré en x et $r > 0$ petit. La réunion des boules ouvertes $B(x, r_x), x \in \overline{\Omega}\setminus\omega_2$ recouvre le compact $\overline{\Omega}\setminus\omega_2$; on en extrait un sous recouvrement fini par des boules $B(x_j, r_{x_j})$ avec $1 \leq j \leq N$. Comme Ω est connexe et régulier , pour tout point x_j, on peut choisir un chemin C^∞ $\gamma_j : [0,1] \to \overline{\Omega}$ qui relie $x_0 = \gamma_j(0)$ à $x_j = \gamma_j(1)$, et qui vérifie $\gamma_j([0,1[) \subset \Omega$. Lorsque $x_j \in \partial\Omega$, on peut aussi supposer que $\frac{d}{ds}(\gamma_j(s)|_{s=1}$ est égal au vecteur unitaire normal sortant en x_j. Comme dans la preuve du théorème 5.1, on peut alors choisir pour tout j un ouvert W_j voisinage de $\overline{\omega}_1 \cup \gamma_j([0,1]) \cup \overline{B}(x_j, 3r_{x_j}/2)$, avec $W_j \subset \Omega$ si $x_j \in \Omega$, et $W_j \cap \{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < r\} \subset \{|x'| < r\}$ si $x_j \in \partial\Omega$, et une fonction $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\overline{\omega}_2)$, qui vérifie l'hypothèse $(H2)$ sur $\overline{W}_j\setminus\omega_2$ (et aussi dans le cas $x_j \in \partial\Omega$, $\partial_{x_n}\varphi_j(0,x') > 0$, $\forall(0,x') \in \overline{W}_j$), et telles qu'il existe des nombres

$$c_{0,j} < c_{1,j} < c'_{1,j} < c_{2,j} < c'_{2,j} < c_{3,j} < c'_{3,j} < 0$$

tels que les ensembles $\{c_{0,j} \leq \varphi_j(x) \leq c'\}$ soient compacts pour tout $c' \leq c'_{3,j}$ et contenus dans $\overline{W}_j \setminus \omega_2$, et tels qu'on ait $B(x_j, r_{x_j}) \subset \{c_{2,j} < \varphi_j(x) < c'_{2,j}\}$ et $\{c_{3,j} < \varphi_j(x) < c'_{3,j}\} \subset \omega_1$. On pose

$$V_j = \{c_{1,j} < \varphi_j(x) < c'_{3,j}\}, \quad V'_j = \{c'_{1,j} < \varphi_j(x) < c_{3,j}\}, \quad V_{k,j} = \{c_{k,j} < \varphi_j(x) < c'_{k,j}\}.$$

On chosit $\chi_j \in C_0^\infty(V_j)$ égal à 1 au voisinage de $\overline{V}'_j$. Soit $\rho_j = c_{2,j} - c'_{1,j} > 0$ et $\rho = \min_j \rho_j > 0$. On pose $A_2 = \min_j c_{2,j} < 0$ et on définit les fonctions $\tilde{\varphi}_j$ par

$$\tilde{\varphi}_j = \varphi_j + A_2 - c_{2,j} \tag{6.163}$$

Alors les $\tilde{\varphi}_j$ vérifient l'hypothèse $(H2)$ sur $\overline{W}_j \setminus \omega_2$ (et aussi $\partial_{x_n} \varphi_j(0, x') > 0$, $\forall (0, x') \in \overline{W}_j$ dans le cas $x_j \in \partial\Omega$), et on a

$$\inf_{V_{2,j}} \tilde{\varphi}_j = A_2, \quad \sup_{V_{1,j}} \tilde{\varphi}_j \leq A_2 - \rho. \tag{6.164}$$

On définit $A_3 \in \,]A_2, 0[$ par $A_3 = \max_j (c'_{3,j} + A_2 - c_{2,j})$ de sorte qu'on a $\sup_{V_j} \tilde{\varphi}_j \leq A_3$. On peut alors appliquer les théorèmes 4.1 (si $x_j \in \Omega$) ou 4.2 (si $x_j \in \partial\Omega$) aux fonctions $\chi_j u$, et en utilisant $support([P, \chi_j]u) \subset V_{1,j} \cup V_{3,j}$, $\chi_j = 1$ sur $V_{2,j}$, (6.164) et $V_{3,j} \subset \omega_1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|h^{1/2} e^{A_2/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times V_{2,j})} + \|h^{3/2} e^{A_2/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times V_{2,j})} \\
&\quad \leq C\Big(\|h^2 e^{(A_2-\rho)/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times V_{1,j})} + \|h^2 e^{(A_2-\rho)/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times V_{1,j})} \\
&\qquad + \|h^2 e^{A_3/h} P u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^2 e^{A_3/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} + \|h^2 e^{A_3/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \Big).
\end{aligned} \tag{6.165}$$

En faisant la somme sur $j \in \{1, \ldots, N\}$, et en utilisant que les $V_{2,j}$ recouvrent $\Omega \setminus \omega_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|h^{1/2} e^{A_2/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega\setminus\omega_2)} + \|h^{3/2} e^{A_2/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega\setminus\omega_2)} \\
&\quad \leq C'\Big(\|h^2 e^{(A_2-\rho)/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^2 e^{(A_2-\rho)/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \\
&\qquad + \|h^2 e^{A_3/h} P u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^2 e^{A_3/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} + \|h^2 e^{A_3/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \Big).
\end{aligned} \tag{6.166}$$

Comme on a $\omega_2 \subset \omega_1$ et $A_2 < A_3$, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\|h^{1/2} e^{A_2/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{A_2/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \\
&\quad \leq C'\Big(\|h^2 e^{(A_2-\rho)/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^2 e^{(A_2-\rho)/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \\
&\qquad + \|h^2 e^{A_3/h} P u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{1/2} e^{A_3/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \\
&\qquad + \|h^{3/2} e^{A_3/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \Big).
\end{aligned} \tag{6.167}$$

On a $\rho > 0$, et $h = \epsilon\theta(t) \leq \epsilon T^2/4$, donc le deuxième terme de (6.167) s'absorbe dans le premier pour ϵ petit, d'où

$$
\begin{aligned}
&\|h^{1/2}e^{A_2/h}u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2}e^{A_2/h}\nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \\
&\quad \leq C''\Big(\|h^2e^{A_3/h}Pu\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{1/2}e^{A_3/h}u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \\
&\qquad + \|h^{3/2}e^{A_3/h}\nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)}\Big).
\end{aligned}
\tag{6.168}
$$

Il reste à prouver qu'on a
(6.169)
$$
\|h^{\frac{3}{2}}e^{A_3/h}\nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \leq C\|h^2e^{A_3/h}Pu\|^2_{L^2(Q)} + C\|h^{1/2}e^{A_3/h}u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}.
$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\omega)$ tel que $\chi = 1$ au voisinage de of $\overline{\omega}_1$. Notons $f = Pu$. Après multiplication par $e^{2\varphi/h}h^3\chi\overline{u}$, et intégration sur Q, on obtient
(6.170)
$$
\frac{1}{2}\int_Q e^{2A_3/h}h^3\chi\partial_t|u|^2\,dt\,dx - \mathrm{Re}\int_Q e^{2A_3/h}h^3\chi\overline{u}\triangle u\,dt\,dx = \mathrm{Re}\int_Q e^{2A_3/h}h^3\chi\overline{u}f\,dt\,dx.
$$

Pour le premier terme I_1, on obtient par intégration par partie en t
(6.171)
$$
\begin{aligned}
|I_1| &= |\tfrac{1}{2}\textstyle\int_Q e^{2A_3/h}h^3\chi\partial_t|u|^2\,dt\,dx| = |\tfrac{1}{2}\int_Q e^{2A_3/h}(3\epsilon\theta' h^2 - 2A_3\epsilon\theta' h)\chi|u|^2\,dt\,dx| \\
&\leq C\|h^{1/2}e^{A_3/h}u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}.
\end{aligned}
$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et support$(\chi) \subset \omega$ impliquent
(6.172)
$$
|I_3| = |\mathrm{Re}\int_Q e^{2A_3/h}h^3\chi\overline{u}f\,dt\,dx| \leq C\|h^2e^{A_3/h}f\|^2_{L^2(Q)} + C\|h^{1/2}e^{A_3/h}u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}.
$$

Pour le deuxième terme, par intégration by partie en x, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_Q e^{2A_3/h}h^3\chi|\nabla_x u|^2\,dt\,dx + \mathrm{Re}\int_Q h^3\nabla_x(e^{2A_3/h}\chi)\overline{u}\nabla_x u\,dt\,dx \\
&\geq \|h^{\frac{3}{2}}e^{A_3/h}\nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} - \frac{1}{2}\int_Q h^3\triangle(e^{2A_3/h}\chi)|u|^2\,dt\,dx.
\end{aligned}
\tag{6.173}
$$

On a $|\int_Q h^3\triangle(e^{2A_3/h}\chi)|u|^2\,dt\,dx| \leq C\|h^{1/2}e^{A_3/h}u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}$. L'estimation (6.169) est donc conséquence de (6.170), (6.171), (6.172) et (6.173). La preuve de la proposition 6.1 est complète. □

La preuve du théorème d'observabilité 6.2 est une conséquence simple de la proposition 6.1. En appliquant l'inégalité (6.1) à $q(t+a,x) \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$, puis en faisant tendre a vers 0, on obtient, en utilisant $A_3 < 0$, $h = \epsilon\theta(t)$, $\theta(t) = t(T-t)$ et

$\sup_{t\in[0,T]}\theta(t) = T^2/4$

$$\int_0^T\int_\Omega \epsilon\theta(t)e^{\frac{2A_2}{\epsilon\theta(t)}}|q(t,x)|^2dxdt$$
$$\leq C\int_0^T\int_\omega \epsilon\theta(t)e^{\frac{2A_3}{\epsilon\theta(t)}}|q(t,x)|^2dxdt \leq \frac{C\epsilon T^2}{4}\int_0^T\int_\omega |q(t,x)|^2dxdt.$$

On en déduit, en choisissant $\epsilon=\epsilon_0$ et en utilisant $\min_{t\in[T/4,3T/4]}\theta(t) = 3T^2/16$

$$e^{-\frac{B}{T^2}}\int_{T/4}^{3T/4}\int_\Omega |q(t,x)|^2dxdt \leq C'\int_0^T\int_\omega |q(t,x)|^2dxdt$$

avec $B = 32|A_2|/3\epsilon_0 > 0$ et $C' = 4C/3$. La fonction $t\to\int_\Omega |q(t,x)|^2dx$ étant décroissante, on a donc obtenu

$$\int_\Omega |q(T,x)|^2dx \leq \frac{2C'e^{\frac{B}{T^2}}}{T}\int_0^T\int_\omega |q(t,x)|^2dxdt$$

ce qui achève la preuve du théorème 6.2.

Références

[1] T. Carleman, Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **26B**, 1939, 1–9.

[2] M. Dimassi et J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, London, Cambridge University Press, 1999, Lecture Note Series. 268.

[3] A.V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, Séoul National University, 1996.

[4] L. Hörmander (L.), *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, II, III, IV*, Springer Verlag, 1985, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, volume 275.

[5] O. Yu. Imanuvilov, G. Uhlmann et M. Yamamoto, The Calderon Problem with Partial Data in Two Dimensions, *Journal American Math. Society,* **23** (2010), 655-691.

[6] G. Lebeau et J. Le Rousseau, On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations, *COCV,* **18** (2012), 712–747.

[7] G. Lebeau, Equation des ondes amorties, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1996, *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, 73–109.

[8] G. Lebeau et L. Robbiano, Contrôle exact de l'équation de la chaleur, *C.P.D.E, 20* (1995), 335–356.

[9] A. Martinez, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, New York, Springer, 2002.

G. Lebau, Département de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis Parc Valrose 06108 Nice Cedex 02, France et Institut Universitaire de France • *E-mail :* lebeau@unice.fr